COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
12 luglio 2011

Teoria 1. Si enunci e dimostri il Teorema del Campionamento e se ne discuta la rilevanza pratica.

Teoria 2. Si dia la definizione di Trasformata di Fourier per un segnale a tempo continuo e se ne discuta il significato. Si illustri un metodo per approssimare la trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo avendo a disposizione una sequenza di campioni del segnale nel dominio del tempo.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
12 luglio 2011

Esercizio 1. Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{(s^2 + 2s + 100)}{(s^3 + 0.02s^2 + s)(s - 1000)}$$

Esercizio 2. Si consideri un sistema lineare a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - 0.25y(k-2) = u(k-1) - 2u(k-3) \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

i) Si calcoli la risposta impulsiva (operando nel dominio del tempo);

ii) Si trovi, se possibile, un segnale di ingresso $u(k)$ non identicamente nullo che soddisfi:

1. $u(k) = 0,\ k < 0$
2. $\exists K$ s.t. $y_f(k) = 0\ \forall k > K$

iii) Dire se è possibile trovare un $u(k)$ non identicamente nullo che soddisfi i seguenti requisiti:

1. $u(k) = 0,\ k < 0$
2. $\nexists M$ s.t. $u(k) = 0\ \forall k > M$
3. $\exists U < \infty$ s.t. $|u(k)| < U\ \forall k \in \mathbb{Z}$
4. $\exists K$ s.t. $y_f(k) = 0\ \forall k > K$

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo con ingresso il segnale $u(t)$ e uscita il segnale $y(t)$ e funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 2}.$$

Si assuma di voler fare in modo che l'uscita $y(t)$ insegua un segnale di riferimento $r(t)$ (disponibile); a tale scopo si vuole progettare un sistema di controllo a retroazione dove l'ingresso $u(t)$ viene scelto nella forma

$$u(t) = K(r(t) - y(t)) \quad K \in R$$

Si osservi che in questo modo il segnale di controllo (i.e. l'ingresso) $u(t)$ è proporzionale al segnale di errore $e(t) := r(t) - y(t)$.

i) Si scriva la funzione di trasferimento dal riferimento $r(t)$ all'uscita $y(t)$ *(Suggerimento: operare nel dominio delle trasformate di Laplace)* .

ii) Si discuta la stabilità del sistema appena trovato (cioè da $r(t)$ a $y(t)$) al variare della costante K del *controllore.*

iii) Assumendo che il segnale di riferimento sia una gradino $r(t) := \delta_{-1}(t)$, si trovi, in funzione di K, l'errore di inseguimento a regime (i.e. per $t \to \infty$).

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -\frac{1}{10}\frac{\left(1 + j2\cdot 0.1\frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}{s\,(1 + j2\cdot 0.01\omega - \omega^2)\,(1 - \frac{j\omega}{1000})}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

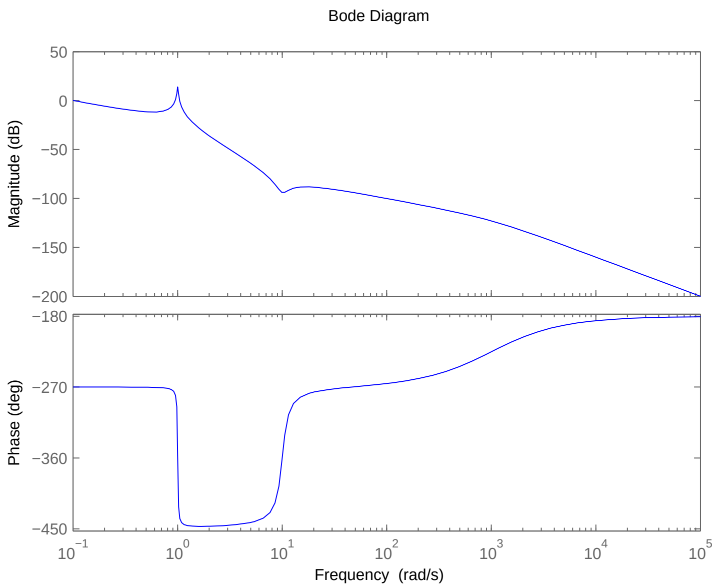

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [2 punti] Ponendo $u(k) = \delta(k)$ si ottiene che la risposta impulsiva $h(k)$ soddisfa:

$$h(k) - 0.25h(k-2) = \delta(k-1) - 2\delta(k-3)k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

con $h(k) = 0\ \forall k < 0$. L'equazione caratteristica $z^2 - 0.25 = 0$ ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Con riferimento alla generica equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i} = \sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}$$

si ha $m = 3$ ed $n = 2$ e quindi la forma generica della risposta impulsiva è:

$$h(k) = d_0\delta(k) + d_1\delta(k-1) + \left[d_3\left(\frac{1}{2}\right)^k + d_4\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]\delta_{-1}(k-2)$$

Dobbiamo ora determinare i coefficienti d_0, d_1, d_2, d_3; per fare questo calcoliamo i primi 4 valori di $h(k)$; da (2) si ottiene: $h(O) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = 0$, $h(3) = -2+0.25 = -\frac{7}{4}$ da cui: $d_0 = 0$, $d_1 = 1$ e:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & d_3\frac{1}{4} - d_4\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & = & d_3\frac{1}{8} + d_4\frac{1}{8} \end{array}$$

da cui: $d_3 = -7$, $d_4 = 7$.

ii) [2 punti] Operando nel dominio delle trasformate si ottiene

$$Y_f(z) = H(z)U(z)$$

con $H(z) = \frac{z^2-2}{z(z^2-0.5)}$; si osservi che $y_f(k)$ ha durata finita (i.e. $\exists K$ s.t. $y_f(k) = 0$ $\forall k > K$) se e solo se $Y_f(z)$ è un polinomio in z^{-1}. È immediato vedere che, scegliendo[1] $U(z) = \frac{z^2-0.5}{z^2}$ si ottiene $Y_f(z) = \frac{z^2-2}{z^3} = z^{-1} - 2z^{-3}$ e quindi $y_f(k) = \delta(k-1) - 2\delta(k-3)$ come desiderato.

iii) [3 punti] Si noti che, affinchè $u(k)$ abbia durata infinita (i.e. $\nexists M$ s.t. $u(k) = 0$ $\forall k > M$) la sua trasformata zeta deve avere almeno un polo non nell'origine.

Ancora operando nel dominio delle trasformate si ottiene

$$Y_f(z) = H(z)U(z)$$

con $H(z) = \frac{z^2-2}{z(z^2-0.5)}$; si osservi che $y_f(k)$ ha durata finita (i.e. $\exists K$ s.t. $y_f(k) = 0$ $\forall k > K$) se e solo se $Y_f(z)$ è un polinomio in z^{-1}, i.e. $Y_f(z) = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i z^{-i}$ e quindi $U(z)$ deve avere la forma:

$$U(z) = \frac{Y_f(z)}{H(z)} = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i z^{-i} \frac{z(z^2-0.5)}{z^2-2}$$

Di conseguenza, a parte i possibili poli nell'origine, $U(z)$ può solo avere[2] poli in $\pm\sqrt{2}$. Poichè questi poli sono in modulo maggiore di 1, la sequenza $u(k)$ nel dominio del tempo è divergente e quindi non soddifa la condizione $\exists U < \infty$ s.t. $|u(k)| < U$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Di conseguenze l'ingresso cercato non estiste.

Esercizio 3.

i) [2 punti] La funzione di trasferimento in catena chiusa si ottiene, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, come segue: si osservi che $Y(s) = H(s)U(s)$ dove la trasformata di Laplace dell'ingresso soddisfa a $U(s) = K(R(s) - Y(s))$. Sostituendo

$$Y(s) = KH(s)R(s) - KH(s)Y(s)$$

da cui:

$$Y(s) = \frac{KH(s)}{1+KH(s)}R(s) = W(s)R(s)$$

con $W(s) := \frac{KH(s)}{1+KH(s)}$

[1] A cui corrisponde $u(k) = \delta(k) - 0.5\delta(k-2)$ che soddisfa le specifiche del problema.

[2] Se $\sum_{i=0}^{K} \alpha_i z^{-i}$ non li cancella.

ii) [3 punti] Sostituendo l'espressione di $H(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+2}$ si ottiene:

$$W(s) = \frac{K(s-1)}{s^2 + (2+K)s + (2-K)}$$

Il sistema descritto da $W(s)$ è BIBO stabile se e solo se i sui poli sono a parte reale negativa; questo succede, utilizzando la regola di Cartesio, quando $K \in (-2, 2)$.

Remark: si osservi che 1 diventa radice del denominatore per $K \to \infty$. In queste condizioni vi sarebbe una cancellazione polo-zero. Tuttavia la funzione di trasferimento da $r(t)$ all'errore $e(t)$

$$T(s) := \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KH(s)}$$

non ha la stessa cancellazione e risulterebbe non BIBO stabile per $K \to \infty$. Per questo motivo, nelle interconnessioni in feedback, si richiede che tutte le possibili funzioni di trasferimento da ogni "sorgente" che agisce nel loop ad ogni segnale nel loop siano BIBO stabili (questa condizione si chiama *stabilità interna dell'interconnessione*). Nel nostro caso questo succede se e solo se $s^2 + (2+K)s + (2-K)$ non ha zeri a parte reale negativa e quindi per $K \in (-2, 2)$.

iii) [3 punti] Abbiamo ricavato al punto precedente la funzione di trsferimento dal riferimento all'errore:

$$T(s) := \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + KH(s)} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + (2+K)s + (2-K)}$$

Quando l'ingresso è un gradino unitario, i.e. $R(s) = \frac{1}{s}$ si ottiene:

$$E(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s(s^2 + (2+K)s + (2-K))}$$

Quando il sistema è BIBO stabile ($K \in (-2, 2)$) esiste il regime permanente (in risposta all'ingresso $r(t) = \delta_{-1}(t)$) ed il valore di regime si può calcolare per esempio usando il teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0^+} sE(s) = \frac{2}{2-K}$$

Si osservi che lo stesso risultato si poteva ottenere calcolando l'espansione in fratti semplici di $E(s)$ oppure applicando il concetto di risposta di regime permanente all'ingresso $r(t) = e^{j\omega_0 t}\delta_{-1}(t)$ con $\omega_0 = 0$.