COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
15 febbraio 2010

Teoria 1. Con riferimento ad un sistema lineare a tempo di screto descritto da un'equazione alle differenze del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i)$$

1. Si ricavi, nel dominio delle trasformate zeta, la relazione tra ingresso, condizioni iniziali e uscita
2. Si dia la definizione di risposta impulsiva e si ricavi la sua forma generale facendo l'antitrasfromata zeta della funzione di trasferimento.

Teoria 2. Si diano le definizioni di serie e trasformata di Fourier. Si ricavi il legame che esiste tra la i coefficienti della serie di Fourier di un segnale periodico $v(t)$ e la trasformata di Fourier di un segnale generatore $v_g(t)$ di $v(t)$. Si faccia un esempio.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
15 febbraio 2010

Esercizio 1. Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s(s^2 - 0.02s + 100)}{(s + 1000)^2(s^2 + 110s + 1000)} \tag{1}$$

Esercizio 2. Si consideri un sistema lineare a tempo discreto con risposta impulsiva

$$h(k) = (0.9)^k \delta_{-1}(k) + \alpha(-0.9)^k \delta_{-1}(k) \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2}$$

i) Si calcoli la funzione di trasferimento

ii) Si scriva una equazione alle differenze che ammetta $h(k)$ come risposta impulsiva.

iii) Si consideri il segnale di ingresso

$$u(k) = \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}\right)\delta_{-1}(k),$$

sia $y_{rp}(k)$ la risposta di regime permanente e sia $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$|y_{rp}(k)| < c \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ \tag{3}$$

Trovare, ove possibile, α in funzione di c (non occorre risolvere l'equazione) in modo che (3) sia soddisfatta.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2a^2}{9}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + bu(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

dove a e b sono due parametri reali.

i) Si discuta la stabilità asintotica e BIBO al variare di a e b.

ii) Fissando $b = 0$, si calcoli la risposta impulsiva del sistema (in funzione di $a \in \mathbb{R}$).

iii) Si determini un ingresso del tipo $A\delta_{-1}(t)$ in modo che, ove possibile, l'uscita forzata abbia una componente di regime permanente $y_{rp}(t) = \delta_{-1}(t)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = \frac{100}{1000^3} \cdot \frac{j\omega\left(1 - j2 \cdot 0.001 \cdot \frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right)^2 \left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

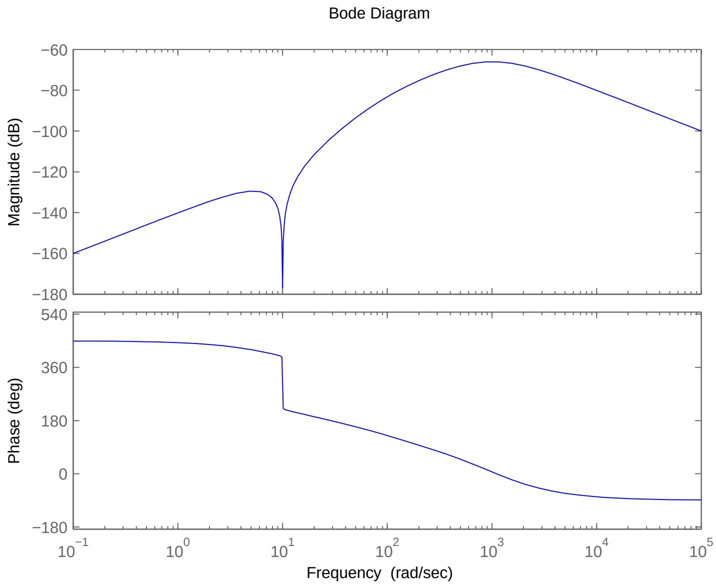

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [1 punto] Utilizzando le trasformate zeta notevoli si ottiene:

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.9} + \alpha\frac{z}{z + 0.9} = \frac{(1+\alpha)z^2 + 0.9(1-\alpha)z}{z^2 - 0.81}$$

ii) [2 punti] Una equazione alle differenze che ha (2) come risposta impulsiva si trova per ispezione dalla funzione di trasferimento:

$$y(k) - 0.81y(k-2) = (1+\alpha)u(k) + 0.9(1-\alpha)u(k-1)$$

iii) [4 punti] Il sistema con funzione di trasferimento $H(z)$ in (1) è BIBO stabile, e quindi ha senso parlare di riposta a regime permanente.

Con un ingresso $u(k) = \cos(\theta k + \phi)\,\delta_{-1}(k) = \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}\right)\delta_{-1}(k)$, la risposta a regime permanente si può trovare utilizzando la relazione:

$$y_{rp}(k) = |H(e^{j\theta})| \cos\Big(\theta k + \phi + \angle H(e^{j\theta})\Big)\, \delta_{-1}(k)$$

con $\theta = \pi/2$.

Per essere precisi bisognerebbe considerare il fatto che il coseno va valutato solo per valori $k \in \mathbb{Z}$ e quindi, il massimo del modulo di $y_{rp}(k)$ dipende dal valore di $\angle H(e^{j\theta})$.

Ci accontentiamo di trovare una condizione leggermente più restrittiva utilizzando il fatto che

$$|\cos\Big(\theta k + \phi + \angle H(e^{j\theta})\Big)| < 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Affinchè $|y_{rp}(k)| < c \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$, è quindi sufficiente garantire che

$$|H(e^{j\theta})|_{\theta=\pi/2} < c$$

Utilizzando il fatto che $e^{j\pi/2} = j$ si ottiene:

$$H(e^{j\pi/2}) = H(z)_{|z=e^{j\pi/2}} = H(z)_{|z=j} = \frac{(1+\alpha)(-1) + 0.9(1-\alpha)j}{-1-0.81}$$

da cui

$$|H(e^{j\pi/2})|^2 = \frac{(1+\alpha)^2 + 0.81(1-\alpha)^2}{(1+0.81)^2} = \frac{1.81(1+\alpha^2) - 0.38\alpha}{1.81^2}$$

La condizione (3) diventa:

$$1.81(1+\alpha^2) - 0.38\alpha < 1.81^2 c^2$$

i.e.

$$\alpha^2 - \frac{0.38}{1.81}\alpha + 1 - 1.81c^2 < 0.$$

Questa disequazione ha soluzione se e solo se le radici di $\alpha^2 - \frac{0.38}{1.81}\alpha + 1 - 1.81c^2 = 0$ sono reali, i.e. se

$$\Delta(c) := \left(\frac{0.38}{1.81}\right)^2 - 4(1 - 1.81c^2) > 0$$

cioè se

$$c > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 - \left(\frac{0.38}{1.81}\right)^2}{1.81}}.$$

Sotto tale condizione, i valori di α che soddisfano (3) sono:

$$\alpha_- < \alpha < \alpha_+$$

dove

$$\alpha_- = \frac{\frac{0.38}{1.81} - \sqrt{\Delta(c)}}{2}$$

$$\alpha_+ = \frac{\frac{0.38}{1.81} + \sqrt{\Delta(c)}}{2}$$

Esercizio 3.

i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^3 + as^2 + 2a^2/9s = 0$$

Indipendentepente dal valore di a l'equazione ha sempre una radice in zero e quindi il sistema non è mai asintoticamente stabile

Per quanto riguarda la stabilità BIBO calcoliamo la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s+b}{s^3 + as^2 + 2a^2/9s}$$

Poichè il polinomio caratteristico ha sempre una radice in zero, l'unico modo per ottenere la stabilità BIBO è che questa radice venga cancellata quando si forma la funzione di trasferimento, e quindi che $b = 0$.

Se $b = 0$ la funzione di trsferimeno diventa

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + as + 2a^2/9}$$

che è la funzione di trasferimento di un sistema BIBO stabile se e solo se tutti i sui poli sono a parte reale negativa.

Per la regola di Cartesio questo succede se e solo se i coefficienti sono tutti dello stesso segno, i.e.

$$a > 0, \quad 2a^2/9 > 0$$

cioè $a > 0$.

Quindi, i conclusione, il sistema non è mi asintoticamente stabile ed è BIBO stabile per $\{(a, b) : a > 0, b = 0\}$.

ii) [3 punti] Per $b = 0$ la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + as + 2a^2/9} = \frac{1}{(s + a/3)(s + 2a/3)}$$

Per $a \neq 0$ i poli sono distinti e si ottiene

$$H(s) = \frac{A}{s + a/3} + \frac{B}{s + 2a/3}$$

con

$$A = \lim_{s \to -a/3}(s + a/3)H(s) = 3/a$$
$$B = \lim_{s \to -2a/3}(s + 2a/3)H(s) = -3/a$$

da cui, facendo l'antistrasformata di Laplace, si ottiene

$$h(t) = \left(\frac{3}{a}e^{-at/3} - \frac{3}{a}e^{-2at/3}\right)\delta_{-1}(t)$$

Se invece $a = 0$, $H(s) = \frac{1}{s^2}$ e quindi la risposta impulsiva é

$$h(t) = t\delta_{-1}(t)$$

iii) [3 punti] Affinchè si possa parlare di risposta a regime permanente il sistema deve essere BIBO stabile e quindi $b = 0$ e $a > 0$. In tali condizioni ad un ingresso $u(t) = A\delta_{-1}(t)$ corrisponde l'uscita di regime permanente

$$y_{rp}(t) = H(j0)A\delta_{-1}(t) = \frac{9}{2a^2}A\delta_{-1}(t)$$

Quindi basta scelgiere $A = \frac{2a^2}{9}$ per ottenere l'uscita desiderata $y_{rp}(t) = \delta_{-1}(t)$.