COMPITO DI
IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI ED ANALISI DEI DATI
13 luglio 2010

Domanda 1. Sia Y_t una serie di osservazioni di tipo economico (inflazione, prodotto interno etc.). Normalmente Y_t viene espressa su scala logaritmica. Per questo motivo la differenza $y_t := Y_t - Y_{t-1}$ rappresenta il tasso di crescita. Si assume che la serie storica y_t si possa modellare come una sovrapposizione di componenti

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t$$

dove ϵ_t è un "rumore di misura" (bianco, a media nulla e varianza σ_ϵ^2), μ_t è un termine di "trend" che soddisfa ad un modello "lineare locale"

$$\begin{aligned} \mu_{t+1} &= \mu_t + \beta_t + \eta_t \\ \beta_{t+1} &= \beta_t + \xi_t \end{aligned}$$

con ξ_t e η_t variabili Gaussiane, a media nulla e varianza σ_ξ^2 e σ_η^2 rispettivamente.

1. Si scriva un modello di stato per il tasso di variazione y_t
2. Si discuta la scelta delle varianze σ_ξ^2 e σ_η^2 dei rumori ξ_t e η_t. Come tarereste questi parametri assumendo siano disponibili dei dati y_t, $t = 1, .., N$.
3. Supponendo tutti i parametri noti, si imposti il problema di stima della "componente di trend" (μ_t) utilizzando il filtro di Kalman.

Domanda 2. Siano $u(t)$ e $e_0(t)$ due rumori bianchi stazionari, incorrelati, a media nulla e varianza unitaria. Si assuma che il processo $y(t)$ sia generato dal modello "vero"

$$y(t) = a_1^0 y(t-1) + b_1^0 u(t-1) + e_0(t) \quad |a_1^0| < 1.$$

Per fare identificazione si utilizzi un modello ARMAX del tipo

$$(1 - a_1 z^{-1})y(t) = b_1 z^{-1} u(t) + (1 + c_1 z^{-1})e(t)$$

dove i coefficienti $\theta := (a_1, b_1, c_1)$ sono da stimare.

1. Si scriva l'equazione per il predittore ad un passo $\hat{y}_\theta(t|t-1)$. Quali condizioni devono essere verificate affinchè $\hat{y}_\theta(t|t-1)$ appena calcolato sia una funzione causale (e stabile) del passato congiunto di $y(t)$ e $u(t)$?
2. Si dica dove converge lo stimatore a minimizzazione dell'errore di predizione

$$\hat{\theta}_N := \arg\min_\theta \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \hat{y}_\theta(t|t-1))^2$$

Domanda 3. Si consideri il modello lineare nei parametri

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i f_i(x,t) + e(t) \tag{1}$$

dove f_i sono funzioni note del tempo t e di una variabile di ingresso x. Ad esempio, si consideri l'equazione di una pendolo (senza attrito) $\ddot{x}(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(x(t))$. Si assuma che $x(t)$ sia misurabile esattamente (ad esempio usando un encoder) e siano anche disponibili misure (rumorose) di accelerazione $y(t) = \ddot{x}(t) + e(t)$, $t = kT_c$, $k = 0, 1, .., N-1$. Allora il modello del pendolo si può scrivere nella forma

$$y(t) = \theta_1 \sin(x(t)) + e(t)$$

dove $\theta_1 := -g/\ell$.

1. Supponendo siano disponibili misure $y(t), x(t), t = kT_c$, $k = 0, .., N-1$ si dica come si può stimare il vettore di parametri $\theta_1, .., \theta_n$.

2. Assumendo che $e(t)$ sia un rumore bianco, Gaussiano, a media nulla e varianza σ_e^2, si scriva l'espressione della varianza dello stimatore ricavato sopra.

3. Si scriva un algoritmo ricorsivo per la stima della lunghezza del pendolo.

4. Supponiamo il sistema descritto da (1) cambi le caratteristiche di qualche suo componente (ad esempio cambia la lunghezza del pendolo). Come di può utilizzare il modello identificato sopra per monitorarne il comportamento?

Domanda 4. Un'azienda ha due impianti di lavorazione; il primo impianto (che chiameremo l'impianto A) è più moderno del secondo impianto (diciamo impianto B) e riesce a smaltire lo stesso carico di lavoro dell'impianto B nella metà del tempo. In aggiunta i pezzi prodotti dall'impianto A sono più affidabili. Si indichi con p_A (p_B) la probabiltà che un pezzo prodotto dall'impianto A (B) si rompa entro il suo primo anno di vita. Si assuma che $p_A = 0.001$ e $p_B = 0.01$.

1. Sapendo che un pezzo "preso a caso" si è rotto entro il suo primo anno di vita, qual'è la probabilità che sia stato prodotto dall'impianto A?

2. Si assuma che pezzi diversi siano "indipendenti" tra loro e che ogni linea di produzione formi dei lotti di 5 pezzi. Sapendo che un lotto proviene dall'impianto A, si calcoli la probabilità che almeno uno dei 5 pezzi si rompa entro un anno.

SOLUZIONI

Domanda 1.

1. Basta prendere come vettore di stato
$$x_t := \begin{bmatrix} \mu \\ \beta \end{bmatrix}$$
e si ottiene che y_t soddisfa all'equazione di stato:
$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_t \\ \xi_t \end{bmatrix} \\ y_t &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + \epsilon_t \end{aligned} \tag{2}$$

2. La taratura delle varianze dei rumori si può fare come segue:
   - calcolare il predittore $\hat{y}_{t|t-1}$ usando l'algoritmo del Filtro di Kalman applicando al modello (2). (Riportare le equazioni. Vedere gli appunti)
     Questo predittore dipende dalle varianze dei rumori.
   - Calcolare gli errori di predizione $e_t := y_t - y_{t|t-1}$, $t = 1, .., N$.
   - Aggiustare le varianze fino a che l'errore di predizione e_t è "il più bianco possibile". Ad esempio si può utilizzare il periodogramma cumulato come test di bianchezza.
   - Poichè la componente di trend μ_t è la prima componente dello stato x_t, è sufficiente trovare, utilizzando l'algoritmo del Filtro di Kalman applicato al modello (2) (scrivere esplicitamente le equazioni, vedere appunti), la stima "filtrata" $\hat{x}_{t|t}$ e porre
   $$\hat{\mu}_{t|t} = [1\ 0]\hat{x}_{t|t}$$

Domanda 2.

1. Dato il modello ARMAX
$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t) + \frac{C(z)}{A(z)}e(t) \tag{3}$$
con dove$A(z)$ e $C(z)$ hanno zeri di modulo strettamente minore di 1, il predittore di un passo si ricava dalla
$$y(t) = \hat{y}(t|t-1) + e(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t) + \frac{C(z) - A(z)}{A(z)}e(t) + e(t). \tag{4}$$
Ricavando $e(t)$ in funzione di $u(t)$ e $y(t)$ in (3) si ottiene
$$e(t) = -\frac{B(z)}{C(z)}u(t) + \frac{A(z)}{C(z)}y(t)$$
e sostituendo in (4) si ottiene
$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{B(z)}{C(z)}u(t) + \frac{C(z) - A(z)}{C(z)}y(t)$$
Con il modello nel testo dell'esercizio si ottiene:
$$\hat{y}_\theta(t|t-1) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + c_1 z^{-1}}u(t) + \frac{(c_1 + a_1)z^{-1}}{1 + c_1 z^{-1}}y(t)$$
dove $\theta := [a_1, b_1, c_1]$ e la condizione di stabilità è che gli zeri di $C(z) := z(1 + c_1 z^{-1})$ siano in modulo minore di uno, cioè $|c_1| < 1$.

2. Lo stimatore PEM converge all'insieme dei punti di minimo di

$$J(\theta) := E\left[(y(t) - \hat{y}_\theta(t|t-1))^2\right]$$

Si verifica facilmente che per $\theta_0 = [b_1^0, a_1^0, 0]$

$$J(\theta_0) = Var\{e_0(t)\}$$

che è chiaramente il minimo assoluto di $J(\theta)$.

Poichè l'ingresso $u(t)$ bianco è persistentemente eccitante, si verifica anche (si vedano gli appunti) che $J(\theta) > Var\{e_0(t)\}$ $\forall \theta \neq \theta_0$.

Di conseguenze lo stimatore PEM converge a $\theta_0 = [b_1^0, a_1^0, 0]$.

Domanda 3.

1. È sufficiente porre

$$Y := \begin{bmatrix} y(0) \\ y(T_c) \\ \vdots \\ y((N-1)T_c) \end{bmatrix} \quad S := \begin{bmatrix} \sin(x(0)) \\ \sin(x(T_c)) \\ \vdots \\ \sin(x((N-1)T_c)) \end{bmatrix} \quad E := \begin{bmatrix} e(0) \\ e(T_c) \\ \vdots \\ e((N-1)T_c) \end{bmatrix}$$

e risolvere il sistema

$$Y = S\theta + E \tag{5}$$

ai minimi quadrati, ottenendo:

$$\hat{\theta}_{LS} = (S^\top S)^{-1} S^\top Y$$

2. L'errore di stima $\tilde{\theta}_{LS} := \hat{\theta}_{LS} - \theta$ si ottiene da:

$$\hat{\theta}_{LS} - \theta = (S^\top S)^{-1} S^\top Y - \theta = (S^\top S)^{-1} S^\top Y - \theta = (S^\top S)^{-1} S^\top E$$

Usando il fatto che le componenti di E sono scorrelate e a varianza σ_e^2 si ottiene:

$$\begin{array}{rcl} Var\{\tilde{\theta}_{LS}\} & = & \mathbb{E}\left[(S^\top S)^{-1} S^\top E E^\top S (S^\top S)^{-1}\right] \\ & = & (S^\top S)^{-1} S^\top \mathbb{E}\left[E E^\top\right] S (S^\top S)^{-1} \\ & = & (S^\top S)^{-1} S^\top \sigma_2^2 I S (S^\top S)^{-1} \\ & = & \sigma_e^2 (S^\top S)^{-1} \end{array}$$

3. Basta applicare l'algoritmo dei minimi quadrati ricorsivi (RLS) (vedi appunti) per risolvere ricorsivamente ai minimi quadrati l'equazione (5). Nel compito ovviamente bisogna riportare le equazioni dei RLS.

4. Avendo ottenuta una stima di θ si può anche ricavare una stima della varianza utilizzando la media campionaria dello scarto quadratico, i.e.

$$\hat{\sigma}_e^2 := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (y(kT_c) - \hat{\theta}_{LS} \sin(x(kT_c)))^2$$

da cui una stima della varianza di $\tilde{\theta}_{LS}$

$$\widehat{Var}\{\tilde{\theta}_{LS}\} = \hat{\sigma}_e^2 (S^\top S)^{-1}$$

Quando si ottengono nuovi dati $\{y(kT_c)\}$, $k = N, N+1, ..$ gli errori $\tilde{y}(kT_c) := y(kT_c) - \hat{\theta}_{LS}\sin(x(kT_c))$ si possono scrivere nella forma:

$$\tilde{y}(kT_c) = e(kT_c) - \tilde{\theta}_{LS}\sin(x(kT_c)), \quad k = N, N+1, ..$$

Poichè $e(kT_c)$ è bianco, $e(kT_c)$ è scorrelato da $\tilde{\theta}_{LS}$ per $k \geq N$. Di conseguenza $\tilde{y}(kT_c)$, sotto ipotesi di Gaussianità di $e(kT_c)$ è una variabile Gaussiana a media zero e varianza

$$Var\{\tilde{y}(kT_c)\} = \sigma_e^2 + Var\{\tilde{\theta}_{LS}\}\sin^2(x(kT_c)) \tag{6}$$

che si può stimare con

$$\widehat{Var}\{\tilde{y}(kT_c)\} = \hat{\sigma}_e^2 + \widehat{Var}\{\tilde{\theta}_{LS}\}\sin^2(x(kT_c))$$

Quando diventano disponibili nuovi dati si può verificare se l'errore di predizione di un passo è ragionevolmente una variabile Gaussiana a media zero e varianza $\widehat{Var}\{\tilde{y}(kT_c)\}$. Per esempio, si può costruire un intervallo di confidenza per l'errore di predizione. Se l'errore effettivo esce "troppo" spesso dall'intervallo di confidenza allora si può ragionevolmente pensare che il valore "vero" del parametro θ è cambiato. Si può anche effetture un test di bianchezza sui residui $\tilde{y}(kT_c)$ come illustrato negli appunti.

LA PARTE CHE SEGUE NON ERA RICHIESTA NEL COMPITO. PER COMPLETEZZA RIPORTO COME SI POTREBBE FORMALIZZARE IL PROBLEMA.

Per quantificare l'analisi sopra si potrebbe procedere come segue:

Da (6) si ottiene che la media della somma degli errori quadratici in una finestra di lunghezza M

$$RMS(M) := \frac{1}{M}\sum_{k=N}^{N+M-1}(y(kT_c) - \hat{\theta}_{LS}\sin(x(kT_c)))^2$$

soddisfa (giustificare!):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[RMS(M)\right] &= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{M}\sum_{k=N}^{N+M-1}(y(kT_c) - \hat{\theta}_{LS}\sin(x(kT_c)))^2\right\} = \\ &= \sigma_e^2 + \frac{Var\{\tilde{\theta}_{LS}\}}{M}\sum_{k=N}^{N+M-1}\sin^2(x(kT_c))\end{aligned} \tag{7}$$

Con un po più di fatica si ottiene che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[RMS^2(M)\right] &= \mathbb{E}\left\{\left[\frac{1}{M}\sum_{k=N}^{N+M-1}(y(kT_c) - \hat{\theta}_{LS}\sin(x(kT_c)))^2\right]^2\right\} = \left(1+\tfrac{2}{M}\right)\sigma_e^4 + \\ &+ \tfrac{2Var\{\tilde{\theta}_{LS}\}\sigma_e^2}{M^2}\left[2\textstyle\sum_{k=N}^{N+M-1}\sin^2(x(kT_c)) + \sum_{k,h=N}^{N+M-1}\sin^2(x(kT_c))\sin^2(x(hT_c))\right] + \\ &+ \mathbb{E}\tilde{\theta}_{LS}^4\tfrac{1}{M^2}\textstyle\sum_{k,h=N}^{N+M-1}\sin^2(x(kT_c))\sin^2(x(hT_c))\end{aligned} \tag{8}$$

dove

$$\mathbb{E}\tilde{\theta}_{LS}^4 = 3\sigma_e^4\frac{\sum_{k,h=N}^{N+M-1}\sin^2(x(kT_c))\sin^2(x(hT_c))}{\left[\sum_{k=N}^{N+M-1}\sin^2(x(kT_c))\right]^4}$$

Per M grande, utilizzando il Teorema Limite Centrale, la densità di probabilità della variabile $RMS(M)$ è ben approssimabile con una Gaussiana; la media $\mathbb{E}RMS(M)$ è data da (7) e la varianza σ_{RMS}^2 si ottiene da (7) e (8) come $\sigma_{RMS}^2 = \mathbb{E}[RMS^2(M)] - [\mathbb{E}[RMS(M)]]^2$

A questo punto è semplice impostare un test delle ipotesi che ci porta a rifiutare l'ipotesi che il parametro θ sia invariato se

$$|RMS(M) - \mathbb{E}[RMS(M)]| > \alpha\sigma_{RMS}$$

dove α si deve determinare imponendo che la probabilità di rifiutare l'ipotesi che il parametro sia costante anche quando effettivamente lo è sia un valore fissato; ad esempio se si vuole che questa probabilità sia 0.95 si deve scegliere $\alpha = 1.96$ (si vedano le tavole delle Gaussiane).

Domanda 4.[8 Punti]

1. Date le ipotesi del problema, un pezzo preso a caso dal mercato ha ha probabilità $P[A] = 2/3$ di provenire dall'impianto A e probabilità $P[B] = 1/3$ di provenire dall"impianto B. La probabilità dell'evento $R := \{\textit{il pezzo si rompe entro il suo primo anno di vita}\}$ si può calcolare usando il teorema della probabilità totale

$$P[R] = P[R|A]P[A] + P[R|B]P[B] = p_A\frac{2}{3} + p_B\frac{1}{3}$$

   La probabilità richiesta $P[A|R]$ si calcola usando la regola di Bayes:

$$P[A|R] = \frac{P[R|A]P[A]}{P[R]} = \frac{\frac{0.002}{3}}{\frac{0.002}{3} + \frac{0.01}{3}} = \frac{1}{6}$$

2. Se un lotto di 5 pezzi "indipendenti" proviene dall'impianto A, la probabilità dell'evento $R5 := \{\textit{Almeno uno dei 5 pezzi si rompe entro l'anno}\}$ si può esprimere in funzione dell'evento come segue:

$$P[R5] = 1 - P[\textit{nessun pezzo rotto entro un anno}] = 1 - P[R^c]^5 = 1 - (1 - 0.001)^5$$