COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
18 giugno 2009

Teoria 1.[5 punti] Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, si ricavi, operando del dominio delle trasformate, l'espressione della risposta forzata e dell'evoluzione libera. Si faccia un esempio numerico di un modello non asintoticamente stabile, la cui risposta impulsiva sia assolutamente integrabile.

Teoria 2. [5 punti] Si dia la definizione di trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo e di serie di Fourier per un segnale a tempo continuo periodico. Dato un segnale a tempo continuo periodico si ricavi la relazione tra i suoi coefficienti di Fourier e la trasformata di Fourier di un segnale generatore.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
18 giugno 2009

Esercizio 1. **[9 punti]** Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + \frac{a^3}{4}y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 9u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.

i) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, il carattere (convergente/limitato/divergente) dei modi elementari del sistema e si studi la stabilità (asintotica e BIBO).

ii) Si determinino (se possibile), al variare di a in $\mathbb{R}$, le condizioni iniziali

$$y(0^-) \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-}$$

a cui corrisponde un evoluzione libera di tipo oscillatorio (eventualmente smorzato).

iii) Ponendo $a = 1$ e imponendo l'ingresso $u(t) = \left[1 + e^{-4t}\right]\delta_{-1}(t)$ si determini, qualora esista, il limite

$$\lim_{t\to\infty} y_f(t).$$

Esercizio 2. **[5 punti]** Si traccino i diagrammi di Bode (reali e asintotici) della seguente funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{(s^2 + 99s - 100)}{(s + 10)(s^2 + 1.6s + 1)}.$$

Esercizio 3. **[6 punti]** Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(k + 1) = ay(k) + u(k) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1. Si consideri il sistema inizialmente a riposo (cioè $y(-1) = 0$). Si determini un ingresso $u(k)$, $k \geq 0$, non nullo solo per un numero finito di valori di k (e nullo per $k < 0$), in modo che l'uscita $y(k)$ sia non nulla solo per $k = 1$.

2. Si assuma $a = 1/2$. Si dica se, dato $u(k) = \sin(\omega k)$, $k \in \mathbb{Z}$, esiste un opportuno ω tale che l'uscita soddisfi $|y(k)| > 3$ per qualche valore di k.

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$p(s) = s^2 + as + \frac{a^3}{4} = 0$$

e quindi ha come zeri $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2-a^3}{4}}$. Utilizzando la regola dei segni di Cartesio si ha:

1. I modi sono convergenti per $a > 0$
2. Un modo è convergente e l'altro divergente per $a < 0$.
3. Per $a = 0$ l'equazione caratteristica ha due radici coincidenti $\lambda_{1,2} = 0$ e quindi un modo è limitato e l'altro divergente.

Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile per $a > 0$ mentre non è asintoticamente stabile per $a \leq 0$.

Per quanto riguarda la BIBO stabilità possiamo subito affermare che il sistema è BIBO stabile per $a > 0$ (la stabilità asintotica implica la stabilità BIBO). Per $a = 0$ la funzione di trasferimento ha un polo doppio in zero e quindi il sistema non è BIBO stabile. Per $a < 0$ il sistema può essere BIBO stabile solo se la radice instabile (a parte reale positiva) di $p(s)$ viene cancellata nella funzione di trasferimento $H(s) := \frac{s+9}{s^2+as+\frac{a^3}{4}}$. Poichè l'unica cancellazione possibile corrisponde ad un radice "stabile" $\lambda = -9$, se ne deduce che il sistema non può mai essere BIBO stabile se $p(s)$ ha almeno una radice a parte reale positiva; di conseguenza il sistema non è BIBO stabile per $a \leq 0$.

ii) [3 punti] Affinchè l'evoluzione libera sia di tipo oscillatorio (eventualmente smorzato) è necessario che le radici del polinomio caratteristico abbiano parte immaginaria non nulla. Questo succede se il discriminante dei $p(s)$ è negativo, cioè $\Delta := \frac{a^2-a^3}{4} < 0$, e quindi per $a > 1$. Per questi valori di a ogni scelta di condizioni iniziali (non identicamente nulle) fornisce una evoluzione libera di tipo oscillatorio smorzato (perchè, per $a > 0$, le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa).

iii) [3 punti] Conviene operare nel dominio delle trasformate di Laplace. La trasformata di Laplace dell'ingresso risulta

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+4}.$$

Di conseguenza, l'uscita forzata ha trasformata di Laplace

$$Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{s+9}{s^2+s+\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+4}\right].$$

Per $a = 1$ i poli di $H(s)$ sono $p_1 = p_2 = -1/2$.

Di conseguenza $Y_f(s)$ ammette la decomposizione

$$Y_f(s) = Y_{f1}(s) + Y_{f2}(s)$$

dove

$$Y_{f1}(s) := \frac{As^2 + Bs + C}{(s+1/2)^2(s+4)} \quad Y_{f2}(s) := \frac{D}{s}$$

e, antistraformando $y_{f1}(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[Y_{f1}(s)\right](t)$, $y_{f2}(t) := \mathcal{L}^{-1}\left[Y_{f2}(s)\right](t) = D$ si ottiene

$$y_f(t) = y_{f1}(t) + y_{f2}(t) = y_{f1}(t) + D.$$

Poichè i poli di Y_{f1} sono a parte reale negativa,

$$\lim_{t\to\infty} y_{f1}(t) = 0.$$

e quindi

$$\lim_{t\to\infty} y_f(t) = D.$$

La costante D si può calcolare come

$$D = \lim_{s\to 0} sY_f(s) = H(0) = 36.$$

Esercizio 2. [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -10 \cdot \frac{(1-j\omega)\left(1+\frac{j\omega}{100}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)(1+j2\cdot 0.8\omega - \omega^2)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati in Figura 1.

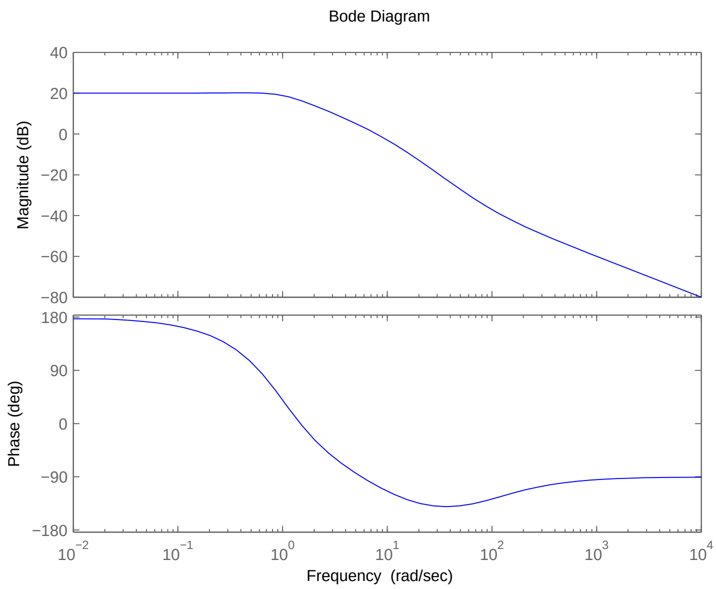

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 3. i) [3 punti] Poichè le condizioni iniziali sono nulle, l'uscita coincide con la risposta forzata. Operando nel dominio delle trasformate zeta, si ottiene

$$Y(z) = Y_f(z) = H(z)U(z) = \frac{1}{z-a}U(z)$$

Affinchè l'uscita sia non nulla solo per $k = 1$, la trasformata zeta di $y(k)$ deve essere

$$Y(z) = y(1)z^{-1}$$

Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} U(z) &= Y(z)/H(z) = (z-a)(y(1)z^{-1}) \\ &= y(1) - ay(1)z^{-1} \end{aligned}$$

Ne consegue che l'ingresso cercato deve avere la forma:

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ u_1 & k = 0 \\ -au_1 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

dove u_1 è arbitrario (ma non nullo).

ii) [3 punti] Poichè per $a = 1/2$ il sistema è BIBO stabile, l'uscita in corrispondenza all'ingresso $u(k) = \sin(\omega k)$ ha la forma

$$y(k) = |H(e^{j\omega})|\sin(\omega k + \angle H(e^{j\omega}))$$

dove

$$H(e^{j\omega}) = H(z)_{|z=e^{j\omega}} = \frac{1}{e^{j\omega} - 1/2}$$

è la risposta in frequenza.

Affinchè $y(k)$ possa essere maggiore di 3 in modulo per qualche valore di k, deve esistere un valore di ω per il quale $|H(e^{j\omega})| > 3$.

Si verifica immediatamente che

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{1}{(\cos(\omega) - 1/2)^2 + \sin^2(\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/4 - \cos(\omega)}}$$

Poichè $-1 \leq \cos(\omega) \leq 1$, si ottiene

$$\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}} \leq |H(e^{j\omega})| \leq 2 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]$$

Di conseguenza, per qualunque scelta di ω, $|y(k)| \leq 2$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ e quindi non è possibile scegliere ω in modo che $|y(k)| > 3$ per qualche valore di $k \in \mathbb{Z}$.