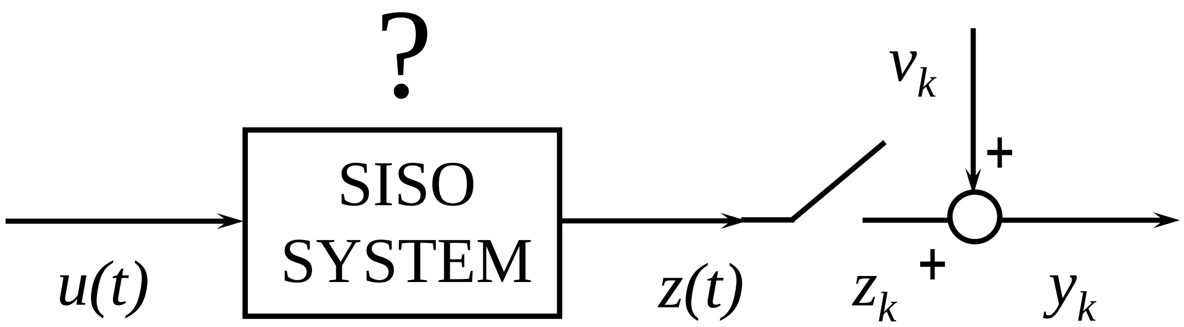
TECNICHE DI IDENTIFICAZIONE NON PARAMETRICA

Gianluigi Pillonetto

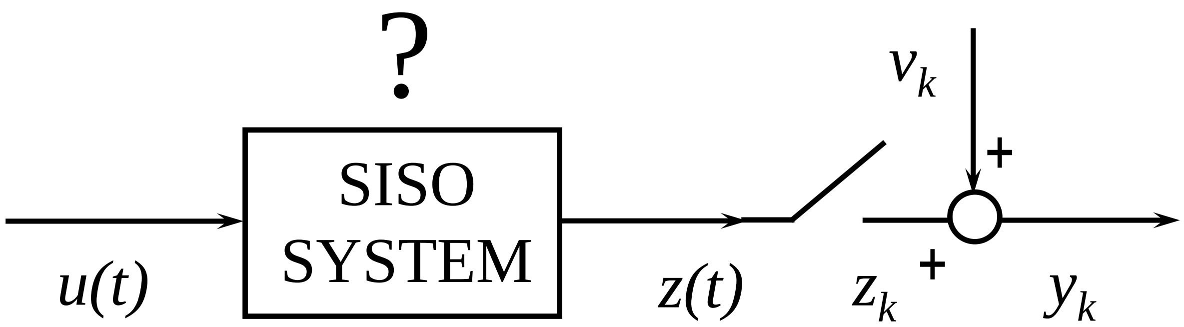
Dipartimento di Ingegneria dell’Informazione

Università di Padova

Il problema dell'identificazione di sistema



Il problema dell'identificazione di sistema

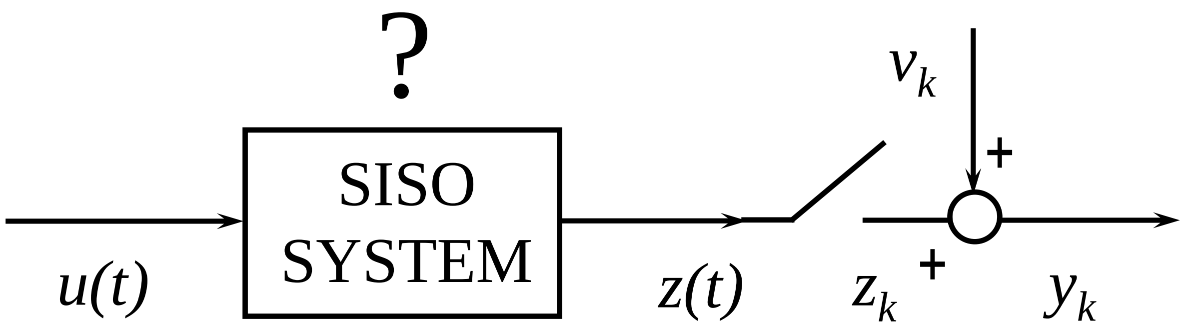


Assunzioni:

- sistema lineare, tempo-invariante e BIBO-stabile
- rumore bianco e Gaussiano

$$y_k = \int_0^{t_k} f\left(t_k - \tau\right) u\left(\tau\right) d\tau + v_k \qquad k = 1,..,n$$

Il problema dell'identificazione di sistema



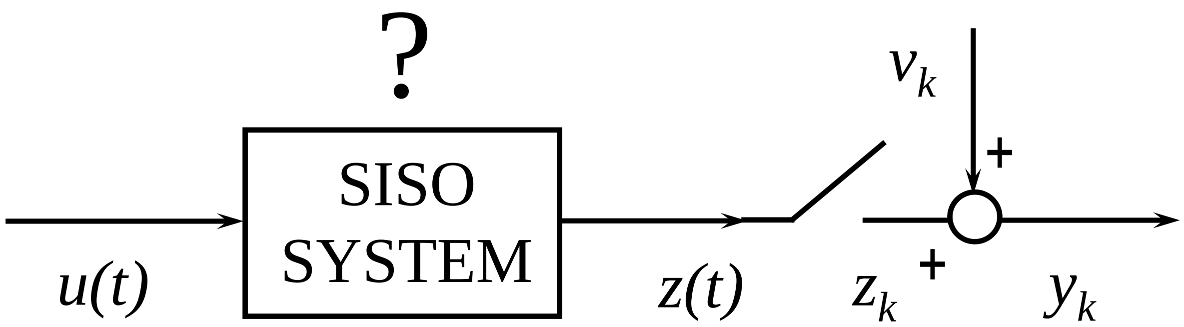
Assunzioni:

- sistema lineare, tempo-invariante e BIBO-stabile
- rumore bianco e Gaussiano

$$y_k = \int_0^{t_k} f\left(t_k - \tau\right) u\left(\tau\right) d\tau + v_k \qquad k = 1,..,n$$

$$v_k \sim N\left(0, \sigma^2\right), \quad f \in L^1$$

Il problema dell'identificazione di sistema



Assunzioni:

- sistema lineare, tempo-invariante e BIBO-stabile
- rumore bianco e Gaussiano

$$y_k = \int_0^{t_k} f\left(t_k - \tau\right) u\left(\tau\right) d\tau + v_k \qquad k = 1,..,n$$

$$v_k \sim N\left(0, \sigma^2\right), \quad f \in L^1$$

Problema:

stimare f da u e $\{y_k\}$

(mal-posto, e.g. soluzione non unica)

Approcci parametrici (1/3)

Definiamo

θ : vettore di dimensione p

Modello parametrizzato da θ

$$y_k = \int_0^{t_k} f_\theta(t_k - \tau) u(\tau) d\tau + v_k$$

L. Ljung System identification, Prentice Hall, 1999
T. Sodestrom and P. Stoica, System identification, Prentice Hall, 1989

Approcci parametrici (1/3)

Definiamo

θ : vettore di dimensione p

Modello parametrizzato da θ

$$y_k = \int_0^{t_k} f_\theta\left(t_k - \tau\right) u\left(\tau\right) d\tau + v_k$$

Approcci di modellizzazione: stato dell'arte

1) $$f_\theta(t) = \sum_{i=1}^{p} \theta_i \phi_i\left(t\right)$$

Modelli lineari usando funzioni di base
(e.g. polinomiali di Laguerre)

L. Ljung System identification, Prentice Hall, 1999
T. Sodestrom and P. Stoica, System identification, Prentice Hall, 1989

Approcci parametrici (1/3)

Definiamo

θ : vettore di dimensione p

Modello parametrizzato da θ

$$y_k = \int_0^{t_k} f_\theta(t_k - \tau)\, u(\tau)\, d\tau + v_k$$

Approcci di modellizzazione: stato dell'arte

1) $$f_\theta(t) = \sum_{i=1}^{p} \theta_i \phi_i(t)$$

Modelli lineari usando funzioni di base (e.g. polinomiali di Laguerre)

2) $$F_\theta(s) = \frac{s^{p/2} + \theta_1 s^{p/2-1} + \ldots + \theta_{p/2}}{\theta_{p/2+1} s^{p/2} + \ldots + \theta_p}$$

$s \in D \subset C$

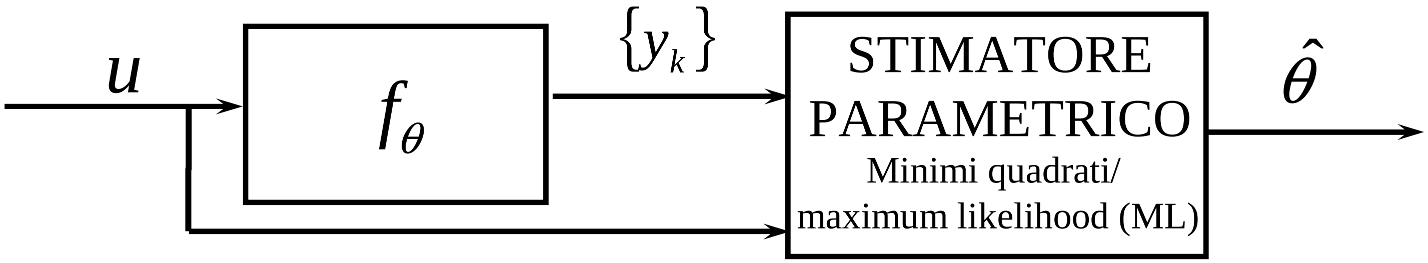
Funzioni di trasferimento razionali (Laplace domain)

....

L. Ljung System identification, Prentice Hall, 1999
T. Sodestrom and P. Stoica, System identification, Prentice Hall, 1989

Approcci parametrici (2/3)

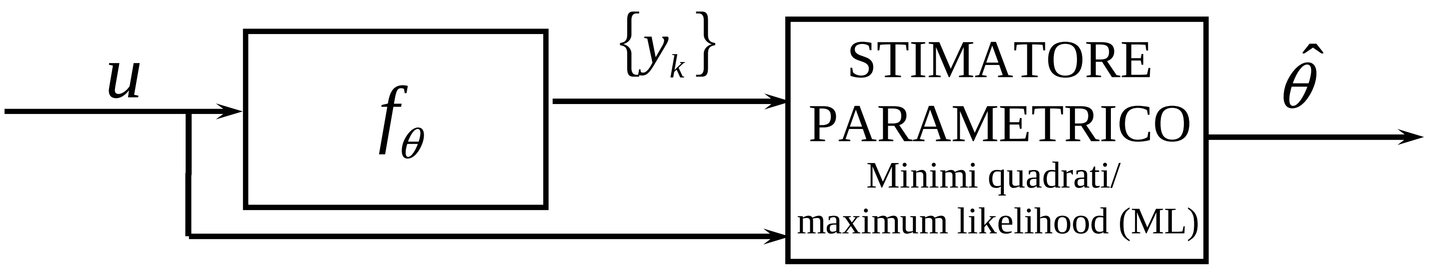
Un caso semplice: struttura del modello e ordine p noto



L. Ljung System identification, Prentice Hall, 1999
T. Sodestrom and P. Stoica, System identification, Prentice Hall, 1989

Approcci parametrici (2/3)

Un caso semplice: struttura del modello e ordine *p* noto



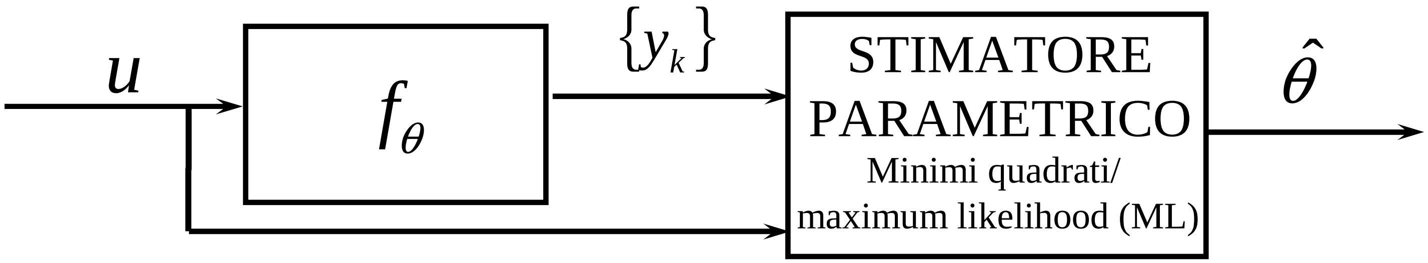
$$\hat{\theta} = \arg\max_\theta L_p\left(\{y_k\} \middle| \theta\right)$$

$$L_p : likelihood\ \ function$$

L. Ljung System identification, Prentice Hall, 1999
T. Sodestrom and P. Stoica, System identification, Prentice Hall, 1989

Approcci parametrici (2/3)

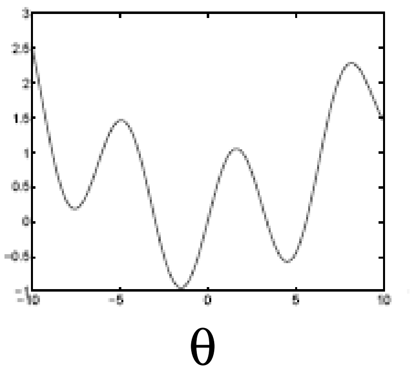
Un caso semplice: struttura del modello e ordine *p* noto



$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} L_p\left(\{y_k\} \middle| \theta\right)$$

$$L_p : \textit{likelihood function}$$

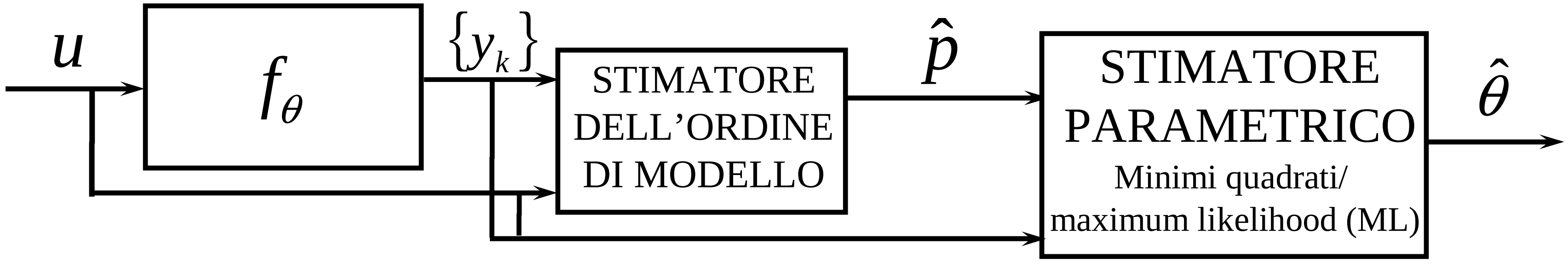
La soluzione richiede tecniche di ottimizzazione non lineare (rischio di massimi locali)



L. Ljung System identification, Prentice Hall, 1999
T. Sodestrom and P. Stoica, System identification, Prentice Hall, 1989

Approcci parametrici (3/3)

Un caso meno semplice: struttura del modello nota/ordine del modello incognito



Approcci parametrici (3/3)

Un caso meno semplice: struttura del modello nota/ordine del modello incognito

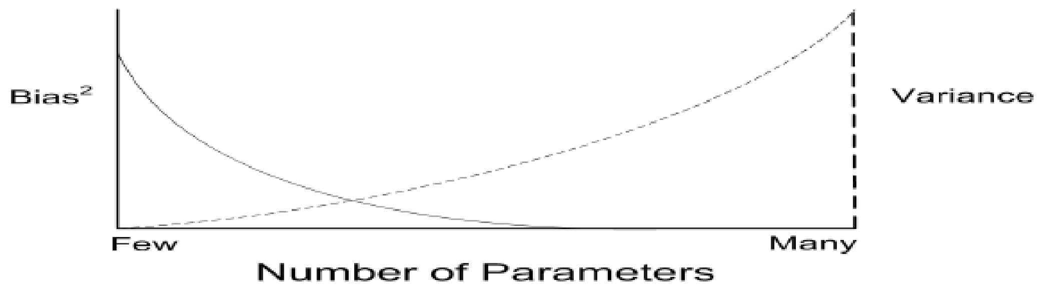
Leading criteria: CAT (Parzen), CP (Mallows), MDL (Rissanen), BIC (Schwarz), **AIC (Akaike)**

H. Akaike Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *International symposium on information theory*, 1973
C.M. Hurvich and C.L. Tsai Regression and time series model selection in small samples *Biometrika* 1989
G. Schwarz Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics* 1978

Approcci parametrici (3/3)

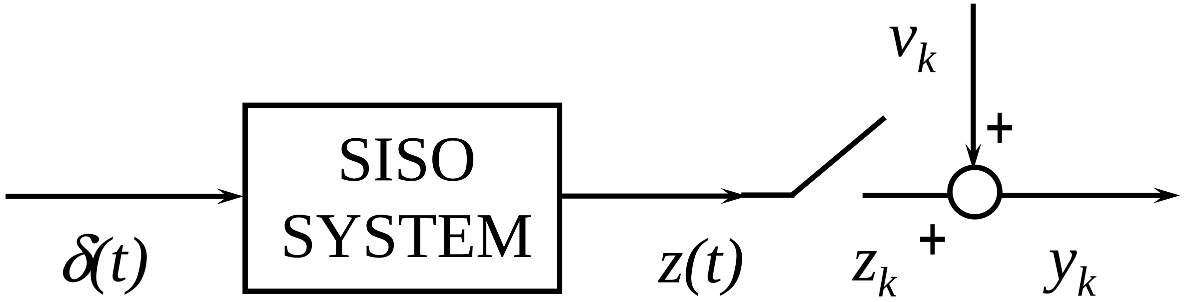
Un caso meno semplice: struttura del modello nota/ordine del modello incognito

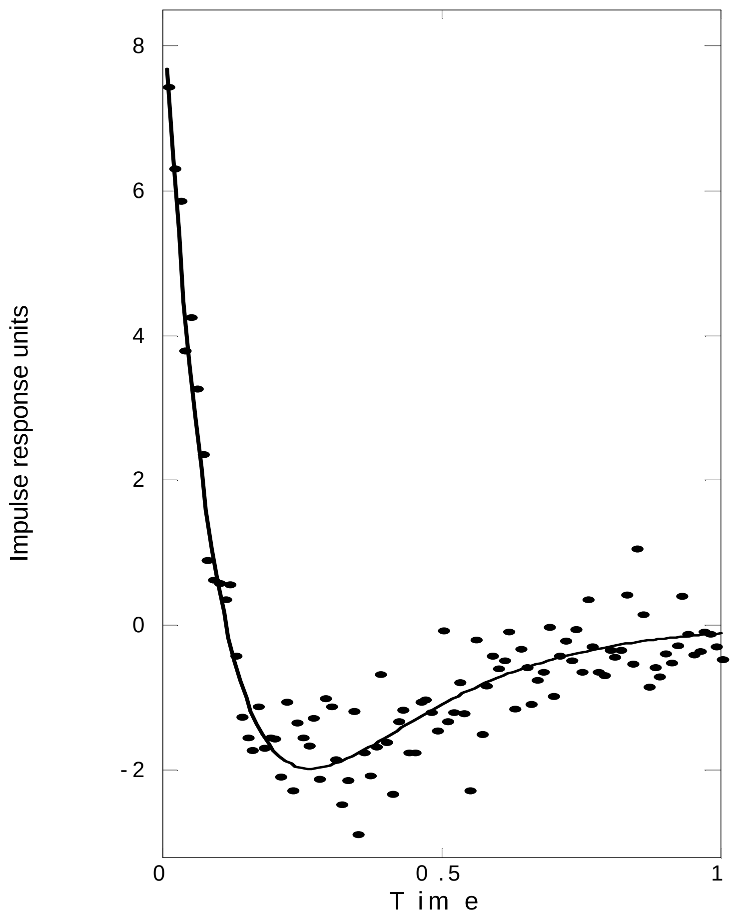
Leading criteria: CAT (Parzen), CP (Mallows), MDL (Rissanen), BIC (Schwarz), **AIC (Akaike)**



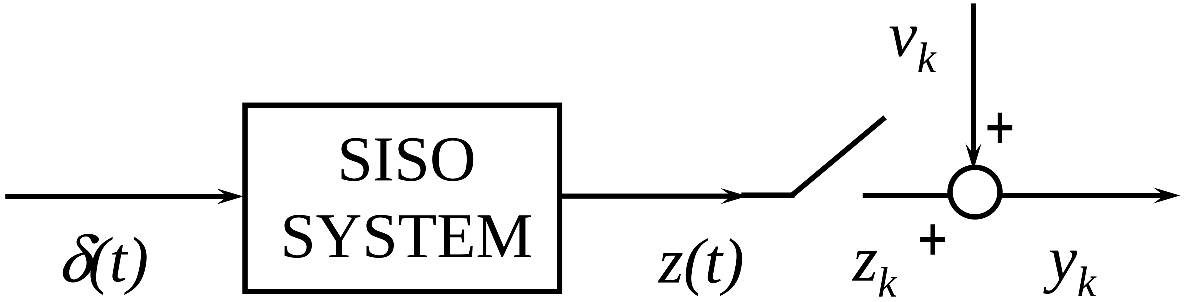
H. Akaike Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *International symposium on information theory*, 1973
C.M. Hurvich and C.L. Tsai Regression and time series model selection in small samples *Biometrika* 1989
G. Schwarz Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics* 1978

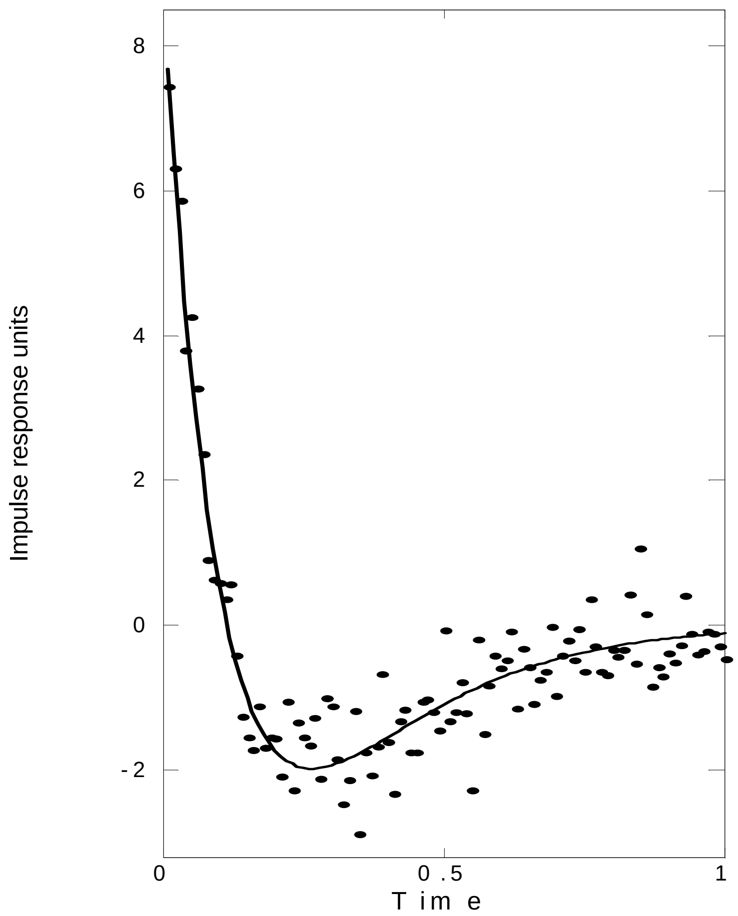
Esempio numerico





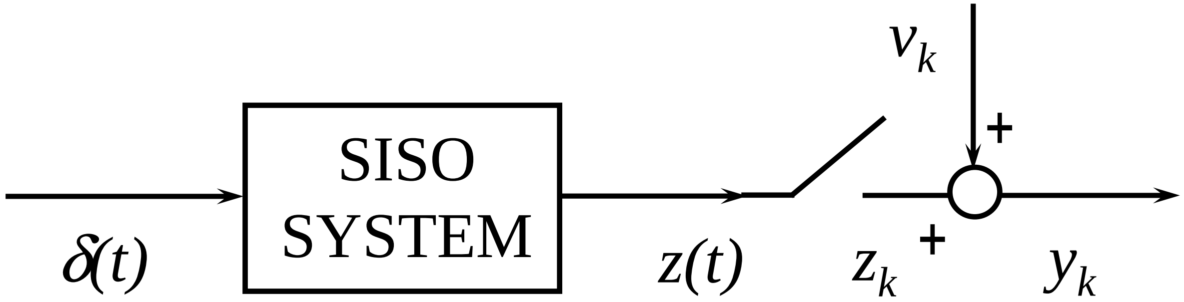
Esempio numerico

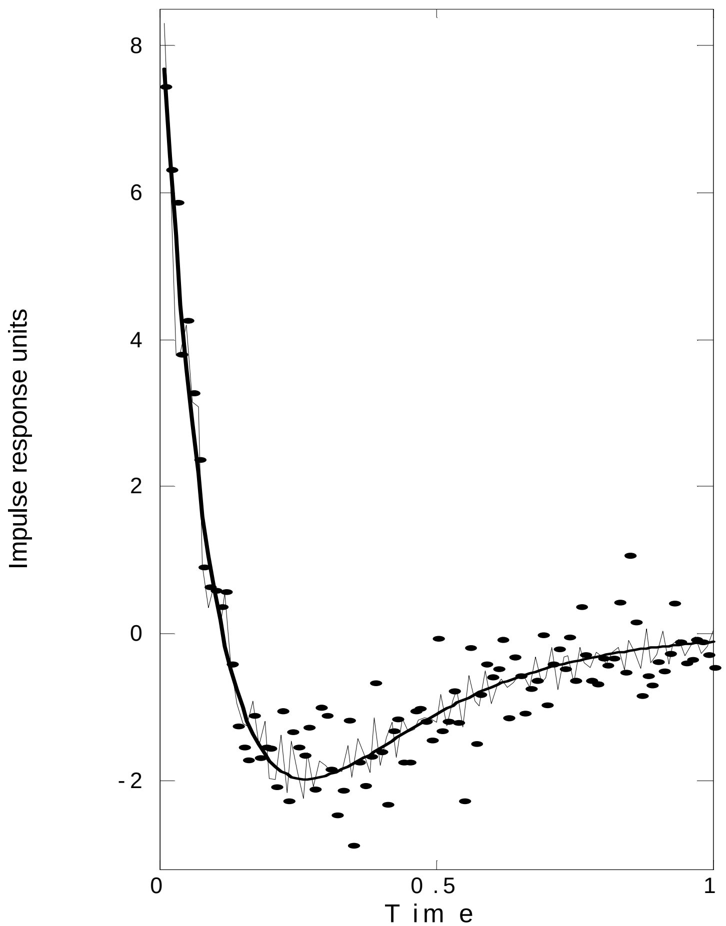




Sistema vero:
funzione razionale
di ordine *p*=3

Esempio numerico

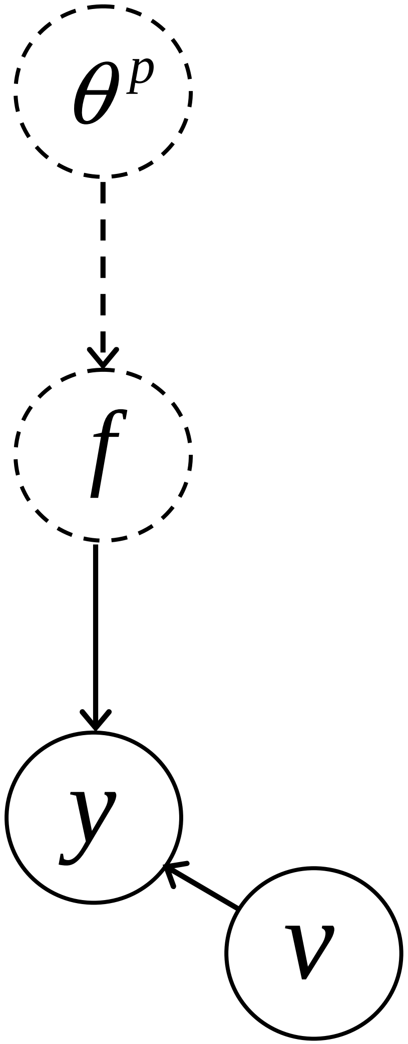




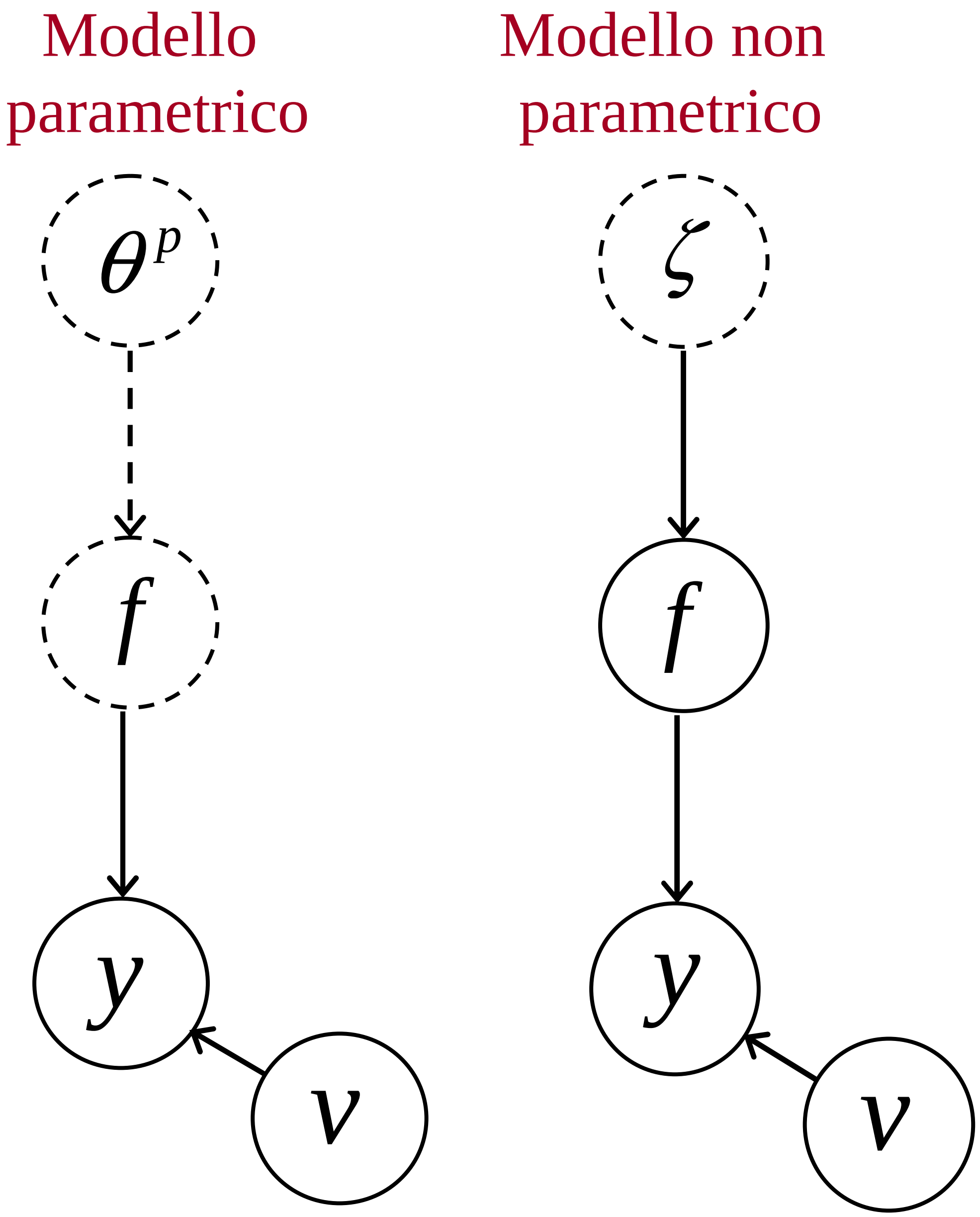
L'ordine stimato da AIC è *p*=8

Dal parametrico al non parametrico (regressione Gaussiana)

Modello parametrico

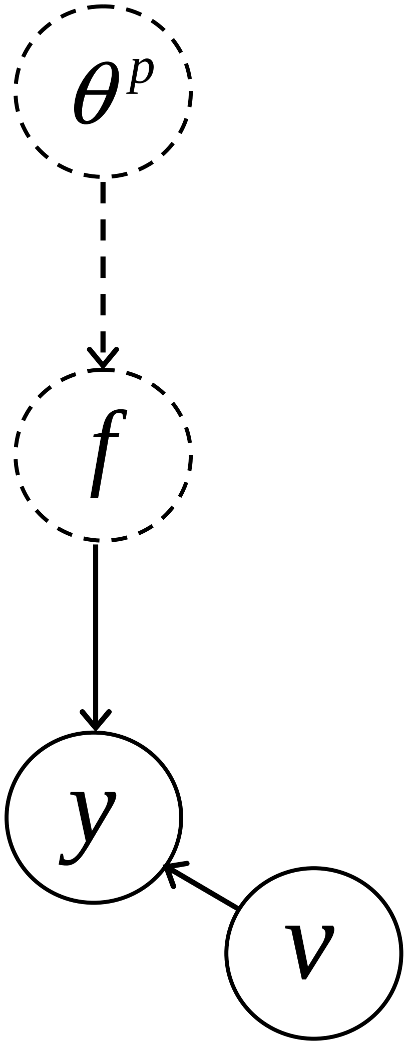


Dal parametrico al non parametrico (regressione Gaussiana)

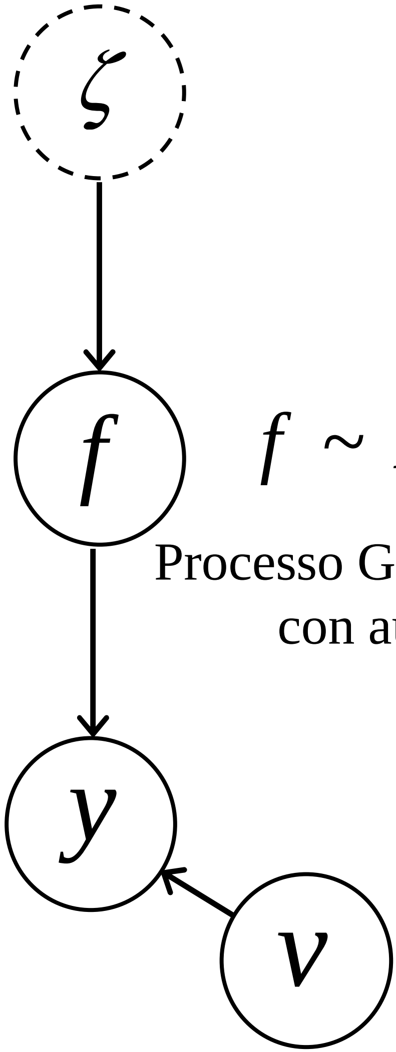


Dal parametrico al non parametrico (regressione Gaussiana)

Modello parametrico



Modello non parametrico



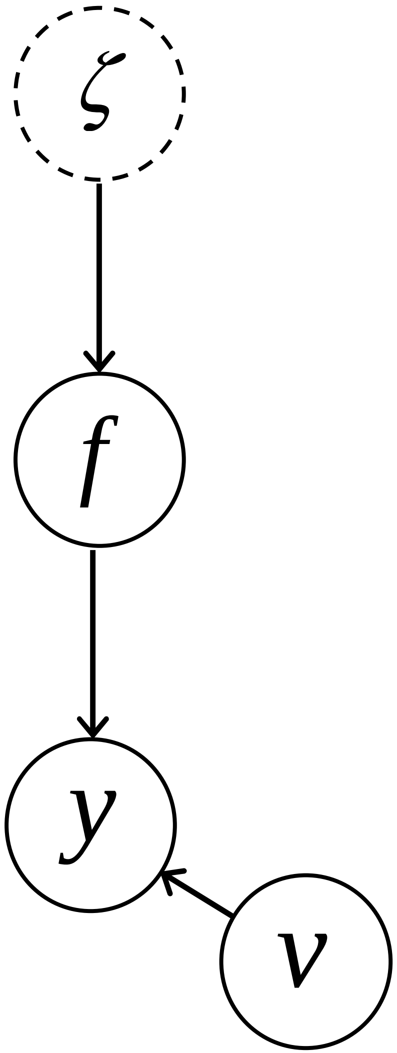
$$f \sim N\left(0, K_{\zeta}\right)$$

Processo Gaussiano a media nulla con autocovarianza K_{ζ}

Rasmussen and Williams, Gaussian processes for machine learning, MIT Press, 2006

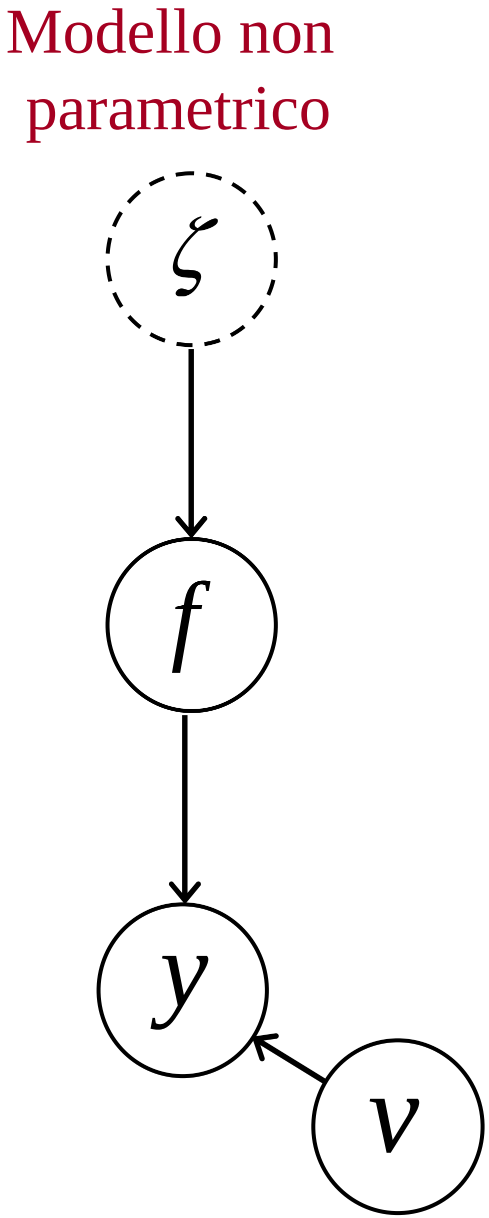
Dal parametrico al non parametrico (regressione Gaussiana)

Modello non parametrico



- la stima dell'ordine di modello è sostituita dalla stima di ζ

Dal parametrico al non parametrico (regressione Gaussiana)

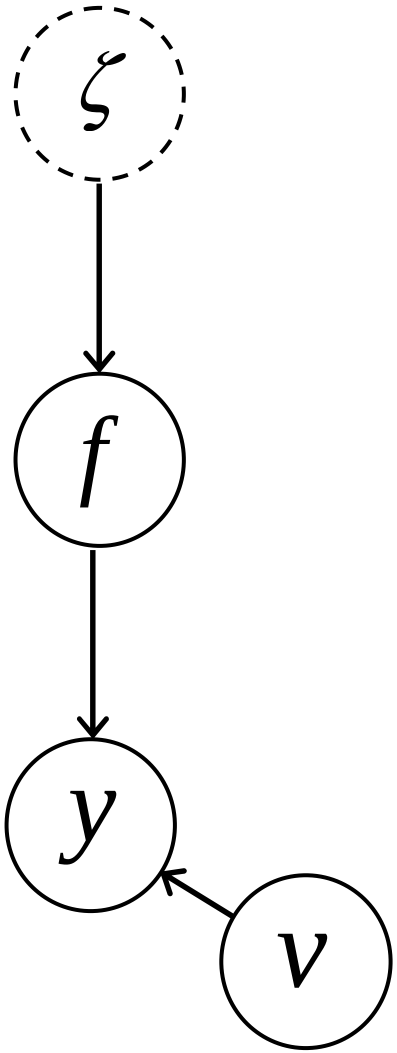


- la stima dell'ordine di modello è sostituita dalla stima di ζ

-la stima di ζ richiede la soluzione di un solo problema di ottimizzazione non lineare, non convesso ma su spazi a dimensione molto bassa

Dal parametrico al non parametrico (regressione Gaussiana)

Modello non parametrico



- la stima dell'ordine di modello è sostituita dalla stima di ζ

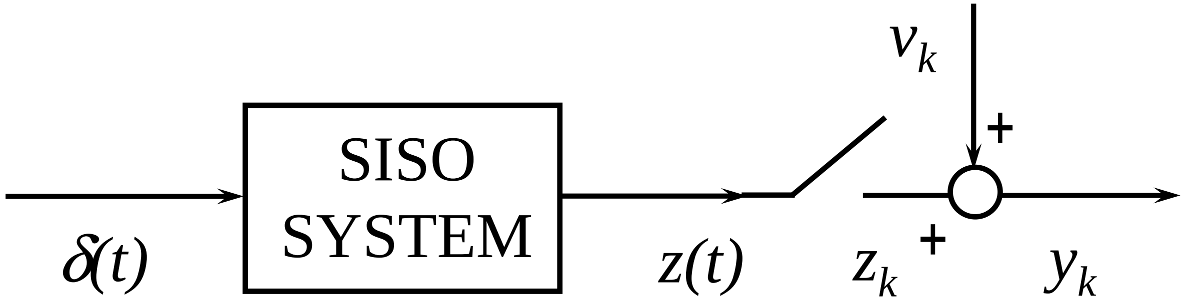
-la stima di ζ richiede la soluzione di un solo problema di ottimizzazione non lineare, non convesso ma su spazi a dimensione molto bassa

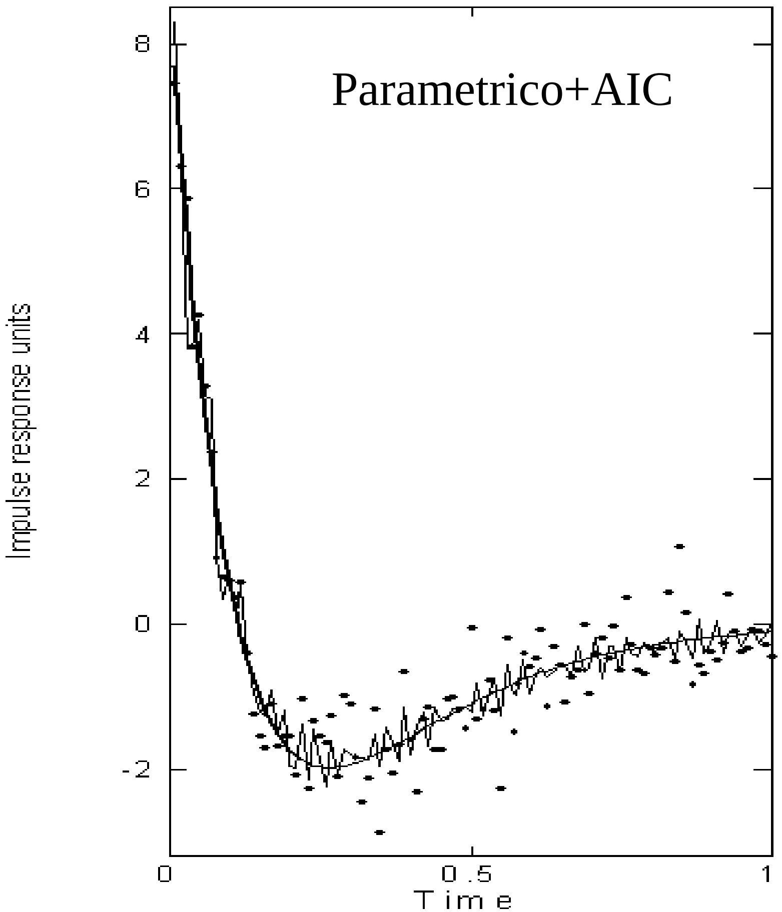
-noto ζ, la stima ha la struttura di una particolare rete neurale, detta rete di regolarizzazione

$$\hat{f}(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_\zeta(t_i, \cdot)$$

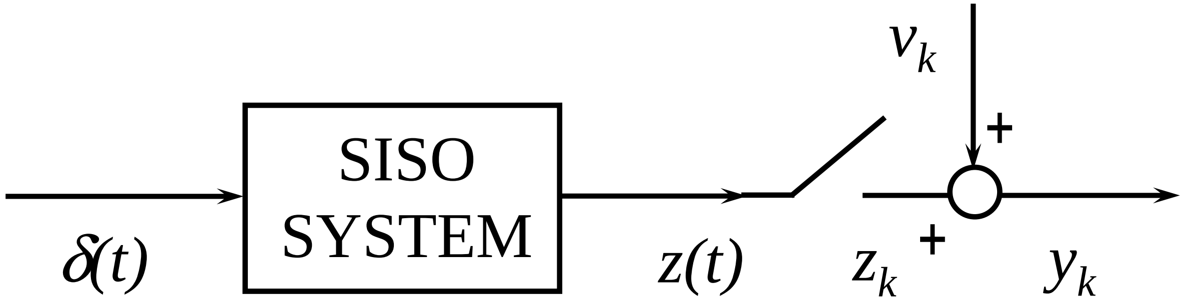
n=numero di dati

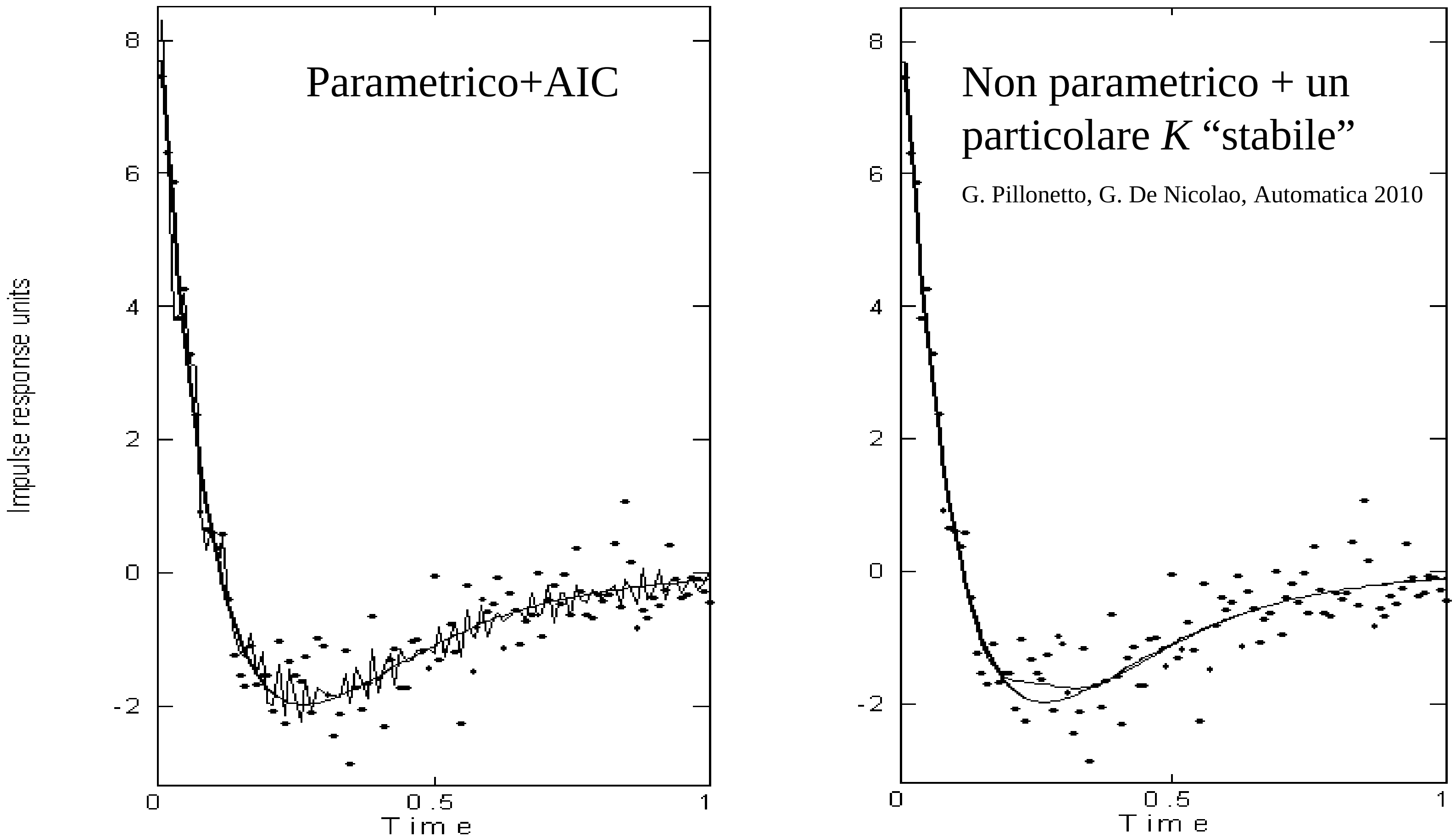
Esempio numerico





Esempio numerico





Possibili argomenti di tesi

- Tesi di carattere informatico:

  Sviluppo di un software di identificazione non parametrica (basato su interfacce grafiche)

Possibili argomenti di tesi

- Tesi di carattere informatico:

  Sviluppo di un software di identificazione non parametrica (basato su interfacce grafiche)

- Tesi di carattere matematico:

  Identificazione non parametrica di sistemi lineari mediante reti di regolarizzazione a due strati

A.A. Micchelli and M. Pontil Learning the kernel via regularization. Journal of Machine Learning Research, 2007
F. Dinuzzo Kernel machines with two layers and multiple kernel learning. Preprint arXiv:1001.2709.

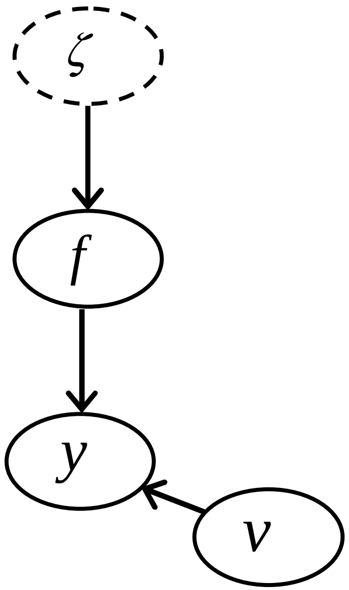
Possibili argomenti di tesi

- Tesi di carattere informatico:

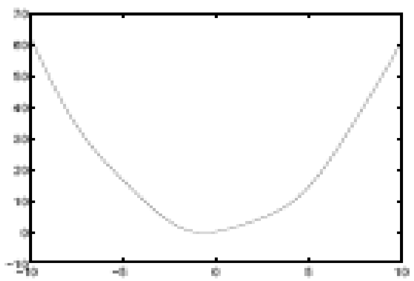
  Sviluppo di un software di identificazione non parametrica (basato su interfacce grafiche)

- Tesi di carattere matematico:

  Identificazione non parametrica di sistemi lineari mediante reti di regolarizzazione a due strati



-Obiettivo: stimare ζ ed *f* risolvendo un solo problema di ottimizzazione convesso



A.A. Micchelli and M. Pontil Learning the kernel via regularization. Journal of Machine Learning Research, 2007
F. Dinuzzo Kernel machines with two layers and multiple kernel learning. Preprint arXiv:1001.2709.

Possibili argomenti di tesi

- Tesi di carattere informatico:

  Sviluppo di un software di identificazione non parametrica (basato su interfacce grafiche)

- Tesi di carattere matematico:

  Identificazione non parametrica di sistemi lineari mediante reti di regolarizzazione a due strati

….

Per ulteriori informazioni: **giapi@dei.unipd.it**

Collaborazioni Internazionali:

Prof. Bradley Bell, Jim Burke
Department of Mathematics and
Applied Physics Laboratory
University of Washington, Seattle

Prof. Stefano Carpin
Faculty of Engineering
University of California, Merced

Dr. Minh Ha Quang
Institute for Theoretical Biology
Humboldt University of Berlin