

4

CONTROLLO OTTIMO E FILTRAGGIO OTTIMO

In questo capitolo il problema dell'allocazione degli autovalori viene ripreso e viene presentata la sua soluzione ottima, in base ad un indice di comportamento quadratico (problema LQR - "Linear-Quadratic-Regulator"). Tale problema è suscettibile di un'interessante estensione per dualità, che porta al noto "filtro di Kalman", che consente l'osservazione ottima dello stato di sistemi affetti da disturbi modellabili come processi stocastici.

4.1 Le equazioni di Lyapunov

Le equazioni di Lyapunov, a tempo continuo e a tempo discreto, consentono di calcolare l'integrale o la sommatoria di una forma quadratica lungo una traiettoria di un sistema dinamico lineare in evoluzione libera, in funzione dello stato iniziale.

Teorema 4.1.1 (Equazione di Lyapunov a tempo continuo) Dato il sistema autonomo a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = A x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4.1)$$

che si suppone stabile, e una matrice simmetrica $M \geq 0$, l'integrale

$$J = \int_0^{\infty} x^T(t) M x(t) dt \quad (4.2)$$

dove $x(t)$ è la soluzione di (4.1), è dato da

$$J = x_0^T P x_0 \quad (4.3)$$

in cui P è la soluzione dell' *equazione algebrica di Lyapunov*¹

$$A^T P + P A = -M \quad (4.4)$$

Dim. Definita

$$V(x) := x^T P x ,$$

lungo una traiettoria di (4.1) si ha

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= x^T(t) A^T P x(t) + x^T(t) P A x(t) = -x^T(t) M x(t) \end{aligned}$$

con $M = (A^T P + P A)$. Quindi

$$\int_0^\infty (x^T(t) M x(t)) dt = - \int_0^\infty \dot{V}(x(t)) dt = -V(x) \Big|_0^\infty = x_0^T P x_0 . \quad \square$$

L'equazione (4.4) si risolve in ambiente Matlab con il comando

$$P = \text{lyap}(A', M) \quad (4.5)$$

Teorema 4.1.2 (Equazione di Lyapunov a tempo discreto) Dato il sistema autonomo a tempo discreto

$$x(k+1) = A x(k) , \quad x(0) = x_0 \quad (4.6)$$

che si suppone stabile, e una matrice simmetrica $M \geq 0$, la sommatoria

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) M x(k) \quad (4.7)$$

dove $x(k)$ è la soluzione di (4.6), è data da

$$J = x_0^T P x_0 \quad (4.8)$$

in cui P è la soluzione dell' *equazione algebrica discreta di Lyapunov*

$$P = A^T P A + M \quad (4.9)$$

¹La (4.4) è analoga all' *equazione di Sylvester*

$$A X - X B = C$$

e ammette soluzione perché A e $-A^T$ non hanno autovalori comuni.

Dim. Definita

$$V(x) := x^T P x ,$$

lungo una traiettoria di (4.6) si ha

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k) \\ &= x^T(k) A^T P A x(k) - x^T(k) P x(k) = -x^T(k) M x(k) \end{aligned}$$

con $-M = (A^T P A - P)$. Quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k) M x(k)) = - \sum_{k=0}^{\infty} \Delta V(x(k)) = -V(x(t)) \Big|_0^{\infty} = x_0^T P x_0 . \quad \square$$

L'equazione (4.9) si risolve in ambiente Matlab con il comando

$$P = \text{dlyap}(A', M) \quad (4.10)$$

4.1.1 Norme H_2 per sistemi a tempo continuo e discreto

Dato il sistema a tempo continuo (A, B, C, D) , la cui matrice di trasferimento è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (4.11)$$

la *norma* H_2 di $G(s)$ è definita dalla prima delle relazioni

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \text{tr} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) G^*(j\omega) d\omega \right)} \quad (4.12)$$

$$= \sqrt{\text{tr} \left(\int_0^{\infty} g(t) g^T(t) dt \right)} \quad (4.13)$$

in cui il simbolo tr indica la traccia di una matrice (somma degli elementi sulla diagonale principale), $G^*(j\omega)$ la coniugata trasposta della matrice $G(j\omega)$, mentre l'uguaglianza fra la prima e la seconda relazione costituisce il noto *teorema di Parseval* multivariabile a tempo continuo. La funzione $g(t)$ è la risposta all'impulso del sistema.

Nota. L'espressione della norma H_2 fornita dal teorema di Parseval equivale a

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_2 &= \sqrt{\int_0^{\infty} \sum_{ij} |g_{ij}(t)|^2 dt} \\ &= \sqrt{\sum_i \|y_i(t)\|_2^2} \end{aligned}$$

in cui $g_{ij}(t)$ è l' ij -simo elemento della matrice di risposta all'impulso $g(t)$ e $y_i(t)$ è la funzione di uscita risultante dall'applicazione di un impulso di Dirac all' i -esimo ingresso.

Similmente, dato il sistema a tempo discreto (A_d, B_d, C_d, D_d) , la cui matrice di trasferimento è

$$G_d(z) = C_d (zI - A_d)^{-1} B_d + D_d \quad (4.14)$$

la *norma* H_2 di $G_d(z)$ è definita con la prima delle relazioni

$$\|G_d(z)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left(\int_{-\pi}^{\pi} G_d(e^{j\omega}) G_d^*(e^{j\omega}) d\omega \right)} \quad (4.15)$$

$$= \sqrt{\operatorname{tr} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_d(k) g_d^T(k) \right)} \quad (4.16)$$

L'uguaglianza fra la prima e la seconda relazione costituisce il *teorema di Parseval* multivariabile a tempo discreto. La funzione $g_d(k)$ è la risposta all'impulso del sistema.

In base alle precedenti considerazioni sulle equazioni di Lyapunov si deduce immediatamente che le norme H_2 si possono calcolare con le relazioni

$$\|G(s)\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\operatorname{tr}(B^T P B)} & \text{se } D = 0 \\ \infty & \text{se } D \neq 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

in cui P indica la soluzione della (4.4) con $M = C^T C$,

$$\|G_d(z)\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(B_d^T P B_d + D_d^T D_d)} \quad (4.18)$$

in cui P indica la soluzione della (4.9) con $A = A_d$, $M = C_d^T C_d$.

Le norme H_2 dei sistemi sia a tempo continuo sia a tempo discreto date dalle (4.17) e (4.18) si calcolano in ambiente Matlab con il comando

$$\mathbf{n} = \text{norm}(\text{sys}) \quad (4.19)$$

in cui *sys* indica un sistema LTI.

4.2 I problemi di controllo ottimo LQ

Nel presente capitolo verranno brevemente presentati gli enunciati e i metodi di soluzione tradizionali dei più importanti problemi di controllo ottimo dei sistemi lineari con indice di comportamento quadratico.

4.2.1 Presentazione dei diversi problemi

1 - Problema LQR a tempo finito – sistemi a tempo continuo

Dati del problema

1. Equazioni del sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_a \quad (4.20)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, (A, B) stabilizzabile.

2. Indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_b) S_b x(t_b) + \frac{1}{2} \int_0^{t_b} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + 2x^T(t) N u(t)) dt \quad (4.21)$$

con $S_b \geq 0$, $R > 0$, $\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$.

Spesso nell'indice di comportamento si pesano solo lo stato e il controllo, il che implica $N = 0$.

Soluzione

1. Equazione differenziale di Riccati:

$$\begin{aligned} -\dot{S}(t) &= A^T S(t) + S(t) A - (S(t) B + N) R^{-1} (B^T S(t) + N^T) + Q, \\ S(t_b) &= S_b \end{aligned} \quad (4.22)$$

Essendo non lineare, si può risolvere con metodi tipo Runge-Kutta.

2. Retroazione dello stato:

$$u(t) = -K(t) x(t), \quad K(t) = R^{-1} (B^T S(t) + N^T) \quad (4.23)$$

4. Costo da t a t_b :

$$J^*(t) = \frac{1}{2} x^T(t) S(t) x(t) \quad (4.24)$$

2 - Problema LQR a tempo infinito – sistemi a tempo continuo

Dati del problema

1. Equazioni del sistema:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad x(0) = x_a \quad (4.25)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, (A, B) stabilizzabile.

2. Indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + 2 x^T(t) N u(t)) dt \quad (4.26)$$

con $R > 0$, $\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$.

Spesso nell'indice di comportamento si pesano solo lo stato e il controllo, il che implica $N = 0$.

Soluzione

1. Equazione algebrica di Riccati (ARE)²:

$$0 = A^T S + S A - (S B + N) R^{-1} (B^T S + N^T) + Q \quad (4.27)$$

Si può risolvere applicando la (4.22) con $S(t_b) = I_n$: si ottiene $S = \lim_{t \rightarrow -\infty} S(t)$.

2. Retroazione dello stato:

$$u(t) = -K x(t), \quad K = R^{-1} (B^T S + N^T) \quad (4.28)$$

4. Costo da t all'infinito:

$$J^*(t) = \frac{1}{2} x^T(t) S x(t) \quad (4.29)$$

Programmi in Matlab

`[S,L,K]=care(A,B,Q,R,N)`

fornisce le matrici S del costo e K di retroazione dallo stato, oltre al vettore L degli autovalori di $A - B K$, che devono essere stabili perché lo stato finale deve essere nullo.

² ARE: Algebraic Riccati Equation, CARE: Continuous Algebraic Riccati Equation.

3 - Problema LQR a tempo finito – sistemi a tempo discreto

Dati del problema

1. Equazioni del sistema:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_a \quad (4.30)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, (A, B) stabilizzabile.

2. Indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2} x^T(k_b) S_b x(k_b) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_b-1} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) + 2 x^T(k) N u(k)) \quad (4.31)$$

con $S_b \geq 0$, $R > 0$, $\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$.

Spesso nell'indice di comportamento si pesano solo lo stato e il controllo, il che implica $N = 0$.

Soluzione

1. Equazione alle differenze di Riccati:

$$S(k) = A^T S(k+1) A - (A^T S(k+1) B + N) (R + B^T S(k+1) B)^{-1} \cdot (B^T S(k+1) A + N^T) + Q, \quad S(k_b) = S_b \quad (4.32)$$

2. Retroazione dello stato:

$$u(k) = -K(k) x(k), \quad \text{con} \\ K(k) = (R + B^T S(k+1) B)^{-1} (B^T S(k+1) A + N^T) \quad (4.33)$$

4. Costo da k a k_b :

$$J^*(k) = \frac{1}{2} x^T(k) S(k) x(k) \quad (4.34)$$

Nota. Sostituendo nelle (4.32), (4.33), (4.37), (4.38) la pseudoinversa di matrice all'inversa si può trattare anche il caso in cui sia $R \geq 0$ (o anche $R = 0$)³.

³ Nel caso a tempo infinito la corrispondente equazione algebrica di Riccati (4.37) si chiama GDARE: Generalized Discrete Algebraic Riccati Equation.

4 - Problema LQR a tempo infinito – sistemi a tempo discreto

Dati del problema

1. Equazioni del sistema:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_a \quad (4.35)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, (A, B) stabilizzabile.

2. Indice di comportamento:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) + 2 x^T(k) N u(k)) \quad (4.36)$$

con $R > 0$, $\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$.

Spesso nell'indice di comportamento si pesano solo lo stato e il controllo, il che implica $N = 0$.

Soluzione

1. Equazione algebrica discreta di Riccati (DARE)⁴:

$$S = A^T S A - (A^T S B + N) (R + B^T S B)^{-1} (B^T S A + N^T) + Q \quad (4.37)$$

Si può risolvere applicando la (4.32) con $S(k_b) = I_n$: si ottiene $S = \lim_{k \rightarrow -\infty} S(k)$.

2. Retroazione dello stato:

$$u(k) = -K x(k), \quad K = (R + B^T S B)^{-1} (B^T S A + N^T) \quad (4.38)$$

4. Costo da k all'infinito:

$$J^*(k) = \frac{1}{2} x^T(k) S x(k) \quad (4.39)$$

Programmi in Matlab

```
[S,L,K]=dare(A,B,Q,R,N)
```

fornisce le matrici S del costo e K di retroazione dallo stato, oltre al vettore L degli autovalori di $A - BK$, che devono essere stabili, perché lo stato finale deve essere nullo.

⁴ DARE: Discrete Algebraic Riccati Equation.

Complementi al Capitolo 4

4.5 Problemi LQR: le dimostrazioni

Questo paragrafo è dedicato alle dimostrazioni dei risultati riportati al Paragrafo 4.2, in particolare delle equazioni di Riccati.

4.5.1 Sistemi a tempo continuo

Si considera il sistema

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad x(0) = x_a \quad (4.40)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, (A, B) stabilizzabile, insieme all'indice di comportamento

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_b) S_b x(t_b) + \frac{1}{2} \int_0^{t_b} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + 2 x^T(t) N u(t)) dt \quad (4.41)$$

con $S_b \geq 0$, $R > 0$, $\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$.

Deduzione dell'equazione differenziale di Riccati

Definita la *funzione hamiltoniana*

$$H(t) = \frac{1}{2} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + 2 x^T(t) N u(t)) + p^T(t) (A x(t) + B u(t)) \quad (4.42)$$

per derivazione parziale rispetto ad x e ad u si ottiene il *sistema aggiunto*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T p(t) - Q x(t) - N u(t) \quad (4.43)$$

con condizione d'estremità

$$p(t_b) = S_b x(t_b) \quad (4.44)$$

e la *condizione di stazionarietà*

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = N^T x(t) + B^T p(t) + R u(t) \quad (4.45)$$

Le (4.43) e (4.45) sono le *condizioni di Eulero-Lagrange*.

Le (4.40) e (4.44) si possono considerare un unico sistema differenziale, il *sistema hamiltoniano*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -N \end{bmatrix} u(t) \quad (4.46)$$

$$0 = \begin{bmatrix} N^T & B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} u(t) \quad (4.47)$$

Si noti che il sistema (4.46), (4.47) è un sistema del tipo $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ di cui si deve mantenere nulla l'uscita agendo opportunamente sul controllo $u(t)$.

Se è $R > 0$, dalla (4.45) si può dedurre

$$u(t) = -R^{-1} (N^T x(t) + B^T p(t)) \quad (4.48)$$

per cui il sistema hamiltoniano si trasforma nel sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B R^{-1} N^T & B R^{-1} B^T \\ -Q + N R^{-1} N^T & -A^T + N R^{-1} B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

di ordine $2n$, che deve essere risolto con le condizioni ai limiti $x(o) = x_a, p(t_b) = S_b x(t_b)$. Poiché $x(t), p(t)$ sono funzioni lineari di $x(0), p(0)$, esse sono reciprocamente funzioni lineari per ogni t . Quindi si può porre

$$p(t) = S(t) x(t) \quad (4.50)$$

con la condizione $p(t_b) = S_b x(t_b)$. Derivando la (4.50) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \dot{S}(t) x(t) + S(t) \dot{x}(t) \\ &= \dot{S}(t) x(t) + S(t) (A x(t) - B R^{-1} (B^T p(t) + N^t x(t))) \end{aligned}$$

ma è anche

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -A^T p(t) - Q x(t) - N u(t) \\ &= -A^T p(t) - Q x(t) - N R^{-1} (B^T p(t) + N^t x(t)) \end{aligned}$$

ed eguagliando i secondi membri,

$$\begin{aligned} -A^T p(t) - Q x(t) - N R^{-1} (B^T p(t) + N^t x(t)) \\ = \dot{S}(t) x(t) + S(t) (A x(t) - B R^{-1} (B^T p(t) + N^t x(t))) \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} -\dot{S} x(t) &= A^T S(t) x(t) + S(t) A x(t) - S(t) B R^{-1} B^T S(t) x(t) \\ &\quad - S(t) B R^{-1} N^T x(t) - N R^{-1} B^T S(t) x(t) - N R^{-1} N^T x(t) + Q x(t) \end{aligned}$$

relazione che deve valere genericamente per ogni $x(t)$. Semplificando e raccogliendo si giunge all'equazione differenziale di Riccati

$$\boxed{\begin{aligned} -\dot{S}(t) &= A^T S(t) + S(t) A - (S(t) B + N) R^{-1} (B^T S(t) + N^T) + Q \\ S(t_b) &= S_b \end{aligned}} \quad (4.51)$$

Una volta determinata $S(t)$ risolvendo la (4.51), si ricava poi

$$u(t) = -R^{-1} (B^T S(t) + N^T) x(t)$$

cioè la retroazione stato-ingresso variabile nel tempo $u(t) = -K(t) x(t)$, con

$$\boxed{K(t) = R^{-1} (B^T S(t) + N^T)} \quad (4.52)$$

Calcolo del costo

Dato il sistema non stazionario

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_b) = x_b \quad (4.53)$$

con la forma quadratica funzione del tempo

$$x^T M(t) x, \quad M(t) \geq 0 \quad (4.54)$$

si vuole calcolare il valore del costo

$$J(t_a) = x^T(t_b) S_b x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} x^T(t) M(t) x(t) dt \quad (4.55)$$

con $S_b \geq 0$. Vale la relazione

$$J(t_a) = x_a^T S(t_a) x_a \quad (4.56)$$

in cui $S(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale di Lyapunov

$$-\dot{S}(t) = A^T(t) S(t) + S(t) A(t) + M(t), \quad S(t_b) = S_b \quad (4.57)$$

Dim. La dimostrazione avviene mediante i seguenti passaggi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^T(t) S(t) x(t)) &= 2x^T(t) S(t) \dot{x}(t) + x^T(t) \dot{S}(t) x(t) \\ &= 2x^T(t) S(t) A(t) x(t) + x^T(t) (-A^T(t) S(t) - S(t) A(t) - M(t)) x(t) \\ &= -x^T(t) M(t) x(t) \end{aligned}$$

Quindi

$$J(t_a) = x^T(t_b) S_b x(t_b) - x^T(t) S(t) x(t) \Big|_{t_a}^{t_b} = x^T(t_a) S(t_a) x(t_a) \quad \square$$

Nel caso in esame, qualora si ponga

$$\begin{aligned} A(t) &= A - B K(t) \\ M(t) &= Q + K^T(t) B^T R B K(t) - 2 N B K(t) \end{aligned}$$

con $K(t)$ espressa dalla (4.52), l'equazione differenziale di Lyapunov viene a coincidere con l'equazione differenziale di Riccati. Il costo relativo allo stato iniziale x_a è pertanto

$$\boxed{J(x_a) = \frac{1}{2} x_a^T S(t_a) x_a} \quad (4.58)$$

in cui il fattore 1/2 è stato introdotto perchè, per semplicità, ignorato nella dimostrazione dell'equazione differenziale di Lyapunov, ed $S(t_a)$ è il valore della soluzione dell'equazione differenziale di Riccati all'istante t_a .

4.5.2 Sistemi a tempo discreto

Si considera il sistema

$$\dot{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_a \quad (4.59)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, (A, B) stabilizzabile, insieme all'indice di comportamento

$$J = \frac{1}{2} x^T(k_b) S_b x(k_b) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_b-1} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) + 2 x^T(k) N u(k)) \quad (4.60)$$

con $S_b \geq 0$, $R > 0$, $\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \geq 0$.

Deduzione dell'equazione alle differenze di Riccati

Definita la *funzione hamiltoniana*

$$H(k) = \frac{1}{2} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) + 2 x^T(k) N u(k)) + p^T(k+1) (Ax(k) + Bu(k)) \quad (4.61)$$

per derivazione parziale rispetto ad x e ad u si ottiene il *sistema aggiunto*

$$p(k) = -\frac{\partial H}{\partial x} = A^T p(k+1) + Q x(k) + N u(k) \quad (4.62)$$

con condizione d'estremità

$$p(k_b) = S_b x(k_b) \quad (4.63)$$

e la *condizione di stazionarietà*

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = N^T x(k) + B^T p(k+1) + R u(k) \quad (4.64)$$

Le (4.60) e (4.63) si possono considerare un unico sistema alle differenze, il *sistema hamiltoniano*

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ p(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -A^{-T} Q & A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ p(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -A^{-T} N \end{bmatrix} u(k) \quad (4.65)$$

$$0 = \begin{bmatrix} -B^T A^{-T} Q + N^T & B^T A^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ p(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R - B^T A^{-T} N \end{bmatrix} u(k) \quad (4.66)$$

Si noti che il sistema (4.65), (4.66) è un sistema del tipo $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ di cui si deve mantenere nulla l'uscita agendo opportunamente sul controllo $u(k)$.

Per deurre l'equazione alle differenze di Riccati, si ipotizza anche in questo caso che sia $p(k) = S(k) x(k)$. Dalla (4.64) si ha

$$R u(k) = -B^T S(k+1) (Ax(k) + Bu(k)) - N^T x(k)$$

cioè

$$(R + B^T S(k+1) B) u(k) = -B^T S(k+1) Ax(k) - N^T x(k)$$

e quindi

$$u(k) = - (R + B^T S(k+1) B)^{-1} (B^T S(k+1) A x(k) - N^T x(k)) \quad (4.67)$$

D'altronde, dalla (4.62) si deduce l'espressione

$$S(k) x(k) = A^T S(k+1) (A x(k) + B u(k)) + Q x(k) + N u(k)$$

sostituendo nella quale la (4.67) si ricava

$$\begin{aligned} S(k) x(k) &= A^T S(k+1) A x(k) - (A^T S(k+1) B + N) \\ &\cdot (R + B^T S(k+1) B)^{-1} (B^T S(k+1) A x(k) - N^T x(k)) + Q x(k) \end{aligned}$$

da cui ancora, per la genericità di $x(k)$, si ha infine l'equazione alle differenze di Riccati

$$\boxed{S(k) = A^T S(k+1) A - (A^T S(k+1) B + N) (R + B^T S(k+1) B)^{-1} \cdot (B^T S(k+1) A + N^T) + Q, \quad S(k_b) = S_b} \quad (4.68)$$

Una volta determinata $S(k)$ risolvendo la (4.68), si ricava poi

$$u(k) = - (R + B^T S(k+1) B)^{-1} (B^T S(k+1) A - N^T) x(k)$$

cioè la retroazione stato-ingresso variabile nel tempo $u(k) = -K(k)x(k)$, con

$$\boxed{K(k) = (R + B^T S(k+1) B)^{-1} (B^T S(k+1) A - N^T)} \quad (4.69)$$

Calcolo del costo

Dato il sistema non stazionario

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad x(k_b) = x_b \quad (4.70)$$

con la forma quadratica funzione del tempo

$$x^T M(k) x, \quad M(k) \geq 0 \quad (4.71)$$

si vuole calcolare il valore del costo

$$J(k_a) = x^T(k_b) S_b x(k_b) + \sum_{k=k_a}^{k_b} x^T(k) M(k) x(k) \quad (4.72)$$

con $S_b \geq 0$. Vale la relazione

$$J(k_a) = x_a^T S(k_a) x_a \quad (4.73)$$

in cui $S(k)$ è la soluzione dell'equazione alle differenze di Lyapunov

$$S(k) = A^T(k) S(k+1) A(k) + M(k), \quad S(k_b) = S_b \quad (4.74)$$

Dim. La dimostrazione avviene mediante i seguenti passaggi

$$\begin{aligned}
\Delta S(k) &= x^T(k+1) S(k+1) x(k+1) - x^T(k) S(k) x(k) \\
&= x^T(k) A^T(k) S(k+1) A(k) x(k) - x^T(k) (A^T(k) S(k+1) A(k) + M(k)) x(k) \\
&= -x^T(k) M(k) x(k)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
J(k_a) &= x^T(k_b) S_b x(k_b) + \sum_{k=k_a}^{k_b-1} x^T(k) M(k) x(k) \\
&= x^T(k_b) S_b x(k_b) - x^T(k) S(k) x(k) \Big|_{k_a}^{k_b} = x^T(k_a) S(k_a) x(k_a) \quad \square
\end{aligned}$$

Nel caso in esame, qualora si ponga

$$\begin{aligned}
A(k) &= A - B K(k) \\
M(k) &= Q + K^T(k) B^T R B K(k) - 2 N B K(k)
\end{aligned}$$

con $K(k)$ espressa dalla (4.69), l'equazione differenziale di Lyapunov viene a coincidere con l'equazione differenziale di Riccati. Il costo relativo allo stato iniziale x_a è pertanto

$$\boxed{J(k_a) = \frac{1}{2} x_a^T S(k_a) x_a} \quad (4.75)$$

in cui il fattore $1/2$ è stato introdotto perchè, per semplicità, ignorato nella dimostrazione dell'equazione differenziale di Lyapunov, ed $S(k_a)$ è il valore della soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati all'istante k_a .

4.6 Richiami sui processi stocastici

Vengono presentati i concetti di base e le definizioni più importanti in relazione ai processi stocastici, in particolare in vista della loro utilizzazione in problemi di filtraggio ottimo.

4.6.1 Processi stocastici scalari

Si considera un *processo stocastico scalare*, rappresentato da una funzione a tempo continuo $x(t)$ o a tempo discreto $x(k)$, di una variabile aleatoria $x \in \mathbb{R}$. La sua *distribuzione di probabilità del primo ordine* è

$$F(x; t) = P(\{x(t) \leq x\}) \quad (4.76)$$

mentre la sua *densità di probabilità del primo ordine* è

$$f(x; t) = \frac{\partial F(x; t)}{\partial x} \quad (4.77)$$

La *distribuzione di probabilità del secondo ordine* di $x(t)$ è

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\{x(t_1) \leq x_1\} \cap \{x(t_2) \leq x_2\}) \quad (4.78)$$

e la sua *densità di probabilità del secondo ordine* è

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.79)$$

Definizione 4.6.1 Il *valore medio* o *valore sperato* del processo stocastico $x(t)$ è

$$\bar{x}(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t) dx \quad (4.80)$$

Definizione 4.6.2 L'*autocorrelazione* del processo stocastico $x(t)$ è

$$\psi_x(t, \tau) = E[x(t)x(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t, \tau) dx_1 dx_2 \quad (4.81)$$

In particolare, il *valore quadratico medio* (RMS) di $x(t)$ è

$$\|x(t)\|_{RMS} = \sqrt{\psi_x(t, t)} = \sqrt{E[x^2(t)]} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x; t) dx} \quad (4.82)$$

Definizione 4.6.3 L'*autocovarianza* del processo stocastico $x(t)$ è

$$\begin{aligned} C_x(t, \tau) &= E[(x(t) - \bar{x}(t))(x(\tau) - \bar{x}(\tau))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}(t))(x_2 - \bar{x}(\tau)) f(x_1, x_2; t, \tau) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.83)$$

In particolare, la *varianza* del processo stocastico $x(t)$ è

$$\sigma_x^2(t) = C_x(t, t) \quad (4.84)$$

mentre la *deviazione standard* σ_x è la radice quadrata della varianza.

Il processo stocastico si dice *stazionario in senso stretto* se la sua descrizione completa, con le distribuzioni di probabilità di qualunque ordine, non dipende dall'origine dei tempi e *stazionario in senso lato* se le funzioni definite in (4.76) e (4.77) non dipendono dal tempo e se le funzioni definite in (4.78) e (4.79) dipendono solo da $\tau = t_2 - t_1$. In questo caso il valore sperato si scrive semplicemente $E[x]$, mentre l'autocorrelazione e l'autocovarianza si indicano semplicemente con $\psi_x(\tau)$ e $C_x(\tau)$, assumendo implicitamente $t = 0$.

Definizione 4.6.4 Le funzione di densità di probabilità *normale* o *gaussiana* per un processo stazionario è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma_x^2} \quad (4.85)$$

Processi stazionari a valor medio nullo

Se il processo è stazionario e il valor medio è nullo, l'autocorrelazione e l'autocovarianza coincidono e si indicano entrambe con $\psi_x(\tau)$. Processi stazionari particolarmente interessanti per le applicazioni sono i *processi ergodici*, caratterizzati dalla proprietà che le medie statistiche coincidono con le medie temporali e quindi, in particolare, le densità di probabilità si possono calcolare a partire da campioni di una realizzazione del processo stocastico presi a diversi istanti, cioè eseguendo medie nel tempo anziché medie di insieme.

L'autocorrelazione si può calcolare come la media nel tempo del prodotto di due rilevazioni del segnale eseguite a distanza temporale τ , cioè:

$$\psi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (4.86)$$

Il valore quadratico medio non dipende dal tempo e coincide con la potenza media eseguita nel tempo:

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{E[x^2]} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt} = \sqrt{\psi_x(0)} \quad (4.87)$$

Nel caso dei sistemi a tempo discreto nelle precedenti relazioni gli integrali nel tempo devono essere sostituiti da sommatorie, cioè in luogo delle (4.86), (4.87) si hanno le relazioni

$$\psi_x(h) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K} \sum_{k=-K}^K x(k) x(k+h) \quad (4.88)$$

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{E[x^2]} = \sqrt{\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K} \sum_{k=-K}^K x^2(k)} = \sqrt{\psi_x(0)} \quad (4.89)$$

Definizione 4.6.5 La *densità spettrale di potenza* di un processo stocastico stazionario e a valor medio nullo è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, cioè

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.90)$$

nel caso a tempo continuo e

$$S_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_x(k) e^{-j\omega k} \quad (4.91)$$

nel caso a tempo discreto.

Ovviamente valgono, nei due casi, le trasformazioni di Fourier inverse

$$\psi_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (4.92)$$

e

$$\psi_x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_x(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (4.93)$$

Definizione 4.6.6 Il *rumore bianco* è un processo stocastico stazionario a valor medio nullo, la cui funzione di autocorrelazione è un impulso di Dirac. Di conseguenza la sua densità spettrale di potenza è costante:

$$\psi(\tau) = q_0 \delta(\tau), \quad S_x(\omega) = q_0 \quad (4.94)$$

$$\psi(k) = q_0 \delta(k), \quad S_x(\omega) = q_0 \quad (4.95)$$

4.6.1 Processi stocastici vettoriali

Un *processo stocastico vettoriale* è rappresentato da una funzione a tempo continuo $x(t)$ o a tempo discreto $x(k)$, con $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, cioè $x \in \mathbb{R}^n$. Le relazioni di definizione delle diverse proprietà sono simili a quelle del caso scalare. La distribuzione di probabilità del primo ordine è ancora

$$F(x; t) = P(\{x(t) \leq x\}) \quad (4.96)$$

in cui le disuguaglianze fra vettori si intendono valere componente per componente tutte insieme, mentre la sua *densità di probabilità del primo ordine* è

$$f(x; t) = \frac{\partial^n F(x; t)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (4.97)$$

La *distribuzione di probabilità del secondo ordine* di $x(t)$ è

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\{x(t_1) \leq x_1\} \cap \{x(t_2) \leq x_2\}) \quad (4.98)$$

dove ancora le disuguaglianze si intendono componente per componente, e la sua *densità di probabilità del secondo ordine* è

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^{2n} F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_{1,1}, \dots, \partial x_{1,n} \partial x_{2,1}, \dots, \partial x_{2,n}} \quad (4.99)$$

Definizione 4.6.7 Il *valor medio* del processo stocastico $x(t)$ è

$$\bar{x}(t) = E[x(t)] = \int \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t) dx \quad (4.100)$$

Definizione 4.6.8 Il *nucleo di correlazione* del processo stocastico $x(t)$ è

$$\psi_x(t, \tau) = E[x(t) x^T(\tau)] = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2^T f(x_1, x_2; t, \tau) dx_1 dx_2 \quad (4.101)$$

Definizione 4.6.9 Il *nucleo di covarianza* del processo stocastico $x(t)$ è

$$\begin{aligned} C_x(t, \tau) &= E[(x(t) - \bar{x}(t)) (x(\tau) - \bar{x}(\tau))^T] \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{x}(t)) (x_2 - \bar{x}(\tau))^T f(x_1, x_2; t, \tau) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Si dice *matrice di covarianza* il nucleo di covarianza calcolato per $t = \tau$, cioè $C_x(t, t)$.

Processi stazionari a valor medio nullo

In questo caso il nucleo di correlazione e il nucleo di covarianza coincidono. Essi verranno indicati con il simbolo $\psi_x(\tau)$ e la matrice di covarianza con il simbolo $\psi_x(0)$. Nel caso dei processi stocastici vettoriali stazionari, a valor medio nullo ed ergodici le relazioni (4.86), (4.87), (4.88) e (4.89) si estendono come segue.

Nucleo di correlazione per processi a tempo continuo

$$\psi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^T(t + \tau) dt \quad (4.103)$$

Valore quadratico medio per processi a tempo continuo

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{E[x^T x]} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^T(t) x(t) dt} = \sqrt{\text{tr}(\psi_x(0))} \quad (4.104)$$

Nucleo di correlazione per processi a tempo discreto

$$\psi_x(h) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K} \sum_{k=-K}^K x(k) x^T(k+h) \quad (4.105)$$

Valore quadratico medio per processi a tempo discreto

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{\mathbb{E}[x^T x]} = \sqrt{\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K} \sum_{k=-K}^K x^T(k) x(k)} = \sqrt{\text{tr}(\psi_x(0))} \quad (4.106)$$

Norme e proprietà dei processi stocastici vettoriali

Definizione 4.6.10 (Norma l_2) La *norma l_2* di un segnale a tempo continuo $x(t)$ o a tempo discreto $x(k)$ è definita rispettivamente dalla prima o dalla seconda delle relazioni

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty x^T(t) x(t) dt} \quad (4.107)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^\infty x^T(k) x(k)} \quad (4.108)$$

Il quadrato di tali norme è l'*energia totale* di $x(t)$ o $y(k)$. Spesso la norma l_2 o l'energia totale è utilizzata per la misura di un transitorio che tende a zero per t tendente all'infinito. Per il teorema di Parseval le suddette norme si possono anche esprimere nel dominio delle frequenze in funzione della trasformata di Laplace o della trasformata z come segue

$$\|x\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty X^*(j\omega) X(j\omega) d\omega} \quad (4.109)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi X^*(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) d\omega} \quad (4.110)$$

Definizione 4.6.11 (Valore quadratico medio) Il *valore quadratico medio (RMS)* di un segnale a tempo continuo $x(t)$ o a tempo discreto $x(k)$ modellato come un processo stocastico stazionario è definito rispettivamente dalla prima o dalla seconda delle relazioni

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{\mathbb{E}[x^T(t) x(t)]} \quad (4.111)$$

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{\mathbb{E}[x^T(k) x(k)]} \quad (4.112)$$

in cui $\mathbb{E}[\cdot]$ indica il valore medio.

È importante notare che per un processo stazionario ergodico $\|x\|_{RMS}$ si può esprimere in funzione della matrice di autocorrelazione $\psi_x(\tau)$ (dove il pedice si riferisce alla funzione considerata) o della densità spettrale di potenza $S_x(\omega)$, definite rispettivamente come

$$\psi_x(\tau) = \mathbb{E} \left[x(t) x^T(t + \tau) \right] \quad (4.113)$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.114)$$

nel caso a tempo continuo e

$$\psi_x(k) = \mathbb{E} \left[x(h) x^T(h + k) \right] \quad (4.115)$$

$$S_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_x(k) e^{-j\omega k}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (4.116)$$

nel caso a tempo discreto. Infatti si ha, rispettivamente per il tempo continuo e per il tempo discreto,

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{\text{tr}(\psi_x(0))} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \text{tr} \left(\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \right)} \quad (4.117)$$

$$\|x\|_{RMS} = \sqrt{\text{tr}(\psi_x(0))} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \text{tr} \left(\int_{-\pi}^{\pi} S_x(\omega) d\omega \right)} \quad (4.118)$$

Si considerano ora le norme H_2 e le loro procedure di calcolo nel caso di segnali stocastici, prima in relazione al tempo continuo, quindi in relazione al tempo discreto.

Nota 4.6.1 (Interpretazione della norma H_2 per segnali stocastici – sistemi a tempo continuo) Si ricorda l'espressione della norma H_2 di un sistema a tempo continuo con funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \text{tr} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) G^*(j\omega) d\omega \right)} \quad (4.119)$$

Si è già vista una procedura di calcolo in termini delle matrici (A, B, C, D) di una realizzazione di $G(s)$. Si supponga che l'ingresso del sistema sia un processo stocastico stazionario avente densità spettrale di potenza $S_u(\omega)$. Anche l'uscita è un processo stocastico stazionario la cui densità spettrale di potenza è data da

$$S_y(\omega) = G(j\omega) S_u(\omega) G^*(j\omega) \quad (4.120)$$

Quindi la norma H_2 di $G(s)$ è il valore quadratico medio dell'uscita y quando all'ingresso si applica un rumore bianco con densità spettrale di potenza unitaria cioè si assume $\psi_u(\tau) = I_p \delta(\tau)$.

Nota 4.6.2 (Interpretazione della norma H_2 per segnali stocastici – sistemi a tempo discreto) Si ricorda l'espressione della norma H_2 di un sistema a tempo discreto con funzione di trasferimento $G_d(z)$:

$$\|G_d\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left(\int_{-\pi}^{\pi} G_d(e^{j\omega}) G_d^*(e^{j\omega}) d\omega \right)} \quad (4.121)$$

Si è già vista una procedura di calcolo in termini delle matrici (A_d, B_d, C_d, D_d) di una realizzazione di $G(z)$. Si supponga che l'ingresso del sistema sia un processo stocastico stazionario avente densità spettrale di potenza $S_u(\omega)$. Anche l'uscita è un processo stocastico stazionario la cui densità spettrale di potenza è data da

$$S_y(\omega) = G_d(e^{j\omega}) S_u(\omega) G_d^*(e^{j\omega}), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (4.122)$$

Quindi la norma H_2 di $G_d(z)$ è il valore quadratico medio dell'uscita y quando all'ingresso si applica un rumore bianco con densità spettrale di potenza unitaria cioè si assume $\psi_u(k) = I_p \delta(k)$.