Tenendo conto che F è espressa dalla relazione (9.138), si trova

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}(t+1 \mid t) &= \left[cz(zI-F)^{-1}\,b\right]\;\mathbf{y}(t) \\
&= \frac{z[(c_1-a_1)\,z^{-1}+\ldots+(c_n-a_n)\,z^{-n}]}{1+c_1\,z^{-1}+\ldots+c_n\,z^{-n}}\;\mathbf{y}(t) \\
&= \frac{z[C^*(z^{-1})-A^*(z^{-1})]}{C^*(z^{-1})}\;\mathbf{y}(t) \\
&= \frac{C_1^*(z^{-1})}{C^*(z^{-1})}\;\mathbf{y}(t)
\end{aligned}
$$

che coincide con quella ricavata usando la teoria di Wiener-Kolmogorov.

Se il modello ARMA non è di innovazione, ad esempio se $C(z)$ è antistabile, la soluzione a regime trovata ($\bar{P}$) deve necessariamente corrispondere allo stesso predittore di Wiener. In un certo senso, risolvere l'equazione di Riccati deve perciò corrispondere ad eseguire la fattorizzazione spettrale che occorre fare per ottenere il modello ARMA d'innovazione. Per verificare che le cose stanno proprio così dovremo pazientare fino alla fine del prossimo capitolo. $\diamondsuit$

Il Filtro di Kalman con Ingressi

In molti problemi di stima che si incontrano in pratica è necessario considerare anche la presenza di variabili di ingresso, o, più in generale di variabili esogene misurabili, ad esempio variabili di comando o regolazione nei sistemi di controllo. Supponendo che queste agiscano linearmente sullo stato, si può fare riferimento in questi casi ad un modello lineare del tipo

$$
\begin{cases}
\mathbf{x}(t+1) = A\,\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t) \\
\mathbf{y}(t) = C\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{w}(t) \quad , \qquad t \geq t_0 \quad ,
\end{cases}
\tag{9.142}
$$

in cui $\mathbf{u}(t)$ è la variabile esogena (o di ingresso), che descriviamo come un processo del secondo ordine. A priori $\mathbf{u}$ potrebbe benissimo essere correlato con altre variabili del modello. Per il resto, assumiamo che valgono le ipotesi standard e che tutti gli altri simboli abbiano il significato usuale.

Problema 9.3. Si assuma che $\mathbf{u}(t)$ sia funzione lineare della storia passata dell'uscita $\mathbf{y}$ nell'intervallo $[t_0, t\,]$. Derivare le equazioni di aggiornamento per le stime dello stato $\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t)$, $\hat{\mathbf{x}}(t \mid t)$, in base all'osservazione della storia passata dell'uscita $\{\mathbf{y}(s) \mid t_0 \leq s \leq t\}$. Verificare che valgono gli stessi ragionamenti fatti per la derivazione dell'algoritmo di Kalman senza ingressi e le equazioni dell'algoritmo sono le stesse appena ricavate, eccettuata la (9.104), che assume ora la forma,

$$
\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t) = F\hat{\mathbf{x}}(t \mid t) + SR^{-1}\,\mathbf{y}(t) + B\,\mathbf{u}(t)\,. \tag{9.143}
$$

$\diamondsuit$

L' ipotesi che $\mathbf{u}$ sia esattamente esprimibile come funzione lineare e causale dall'uscita è restrittiva. In genere ci sono altri segnali che concorrono a determinare l'andamento temporale dell'ingresso oltre a quello della variabile di uscita. Una situazione abbastanza realistica si ha quando nel modello lineare (9.142) l'ingresso è generato mediante una legge di controllo causale del tipo

$$\mathbf{u}(t) = H(\mathbf{y}^t) + \mathbf{r}(t) \tag{9.144}$$

dove H è una funzione lineare della storia passata e presente del processo $\mathbf{y}$ e $\mathbf{r}$ è un processo del secondo ordine *scorrelato da tutta la storia dei rumori* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *del modello* (9.142). Notiamo che se in particolare, $H \equiv 0$, l'ingresso $\mathbf{u}(t)$ è esso stesso scorrelato dai rumori di modello e di osservazione $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Notiamo che non si può in generale assumere che gli $\mathbf{u}$ futuri per $t \geq t_0$, siano scorrelati dallo stato iniziale $\mathbf{x}(t_0)$. Questo accade perchè lo stato nel modello (9.142) è una funzione causale degli ingressi passati, in particolare degli ingressi $\mathbf{u}$ che sono stati applicati prima dell'istante t_0 e la storia passata e futura di $\mathbf{u}$ sono in generale correlate (a meno che $\mathbf{u}$ non sia un processo bianco).

D'ora in avanti supporremo che la storia passata della variabile di ingresso $\{\mathbf{u}(s) \,|\, t_0 \leq s \leq t\}$ non sia contenuta in $\mathbf{H}_t(\mathbf{y})$. Supporremo però che $\mathbf{u}$ sia *osservabile* e quindi il passato $\{\mathbf{u}(s) \,|\, t_0 \leq s \leq t\}$ sia noto ad ogni istante t. Si vogliono trovare le equazioni del Filtro di Kalman che descrivono l'aggiornamento delle stime dello stato basate sull'osservazione *congiunta* dell'uscita $\mathbf{y}$ e dell'ingresso $\mathbf{u}$ fino all'istante t. Per ricavare queste equazioni è necessario in generale "aumentare" il modello (9.142) aggiungendo una descrizione della dinamica del processo di ingresso. Richiamandoci anche a quanto esposto nel Capitolo 7, considereremo allora il modello di stato congiunto ottenuto accoppiando (9.142) al modello del canale di reazione che genera l'ingresso (che supporremo di dimensione finita).

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t+1) = A\mathbf{x}_1(t) + B\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{w}_1(t) \end{cases} \tag{9.145}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_2(t+1) = F\mathbf{x}_2(t) + G\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}_2(t) \\ \mathbf{u}(t) = H\mathbf{x}_2(t) + J\mathbf{y}(t) + \mathbf{w}_2(t)\,. \end{cases} \tag{9.146}$$

Per uniformità di notazioni abbiamo sostituito il simbolo $\mathbf{x}$ (che denoterà lo stato aumentato) con $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{v}$ con $\mathbf{v}_1$ (di varianza Q_1), $\mathbf{w}$ con $\mathbf{w}_1$ etc.. Per il modello che descrive la dinamica di $\mathbf{u}$ abbiamo usato notazioni congruenti. I rumori bianchi con pedici diversi sono tra loro completamente scorrelati. Aumentando lo stato si ricava così il modello che descrive il processo congiunto delle osservazioni in forma standard,

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} A+BJC & BH \\ GC & F \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{v}}_2(t) \end{bmatrix} := \mathcal{A}\,\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t) \tag{9.147a}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ JC & H \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ J & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1(t) \\ \mathbf{w}_2(t) \end{bmatrix} := \mathcal{C}\mathbf{x}(t) + \mathcal{D}\mathbf{w}(t) \tag{9.147b}$$

dove

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1 \\ \bar{\mathbf{v}}_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BJ & B \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} := \mathbf{v} + \mathcal{B}\mathbf{w} \tag{9.148}$$

È allora ovvio che la stima dello stato del modello (9.145), ad esempio il predittore di un passo $\hat{\mathbf{x}}_1(t+1 \mid t)$, ottenuto proiettando lo stato $\mathbf{x}_1(t+1)$ sullo spazio $\mathbf{H}_t(\mathbf{y}, \mathbf{u})$, si può calcolare prendendo le prime n_1 componenti del predittore dello stato del modello congiunto (che ha dimensione n), basato sulla storia passata delle variabili di ingresso e di uscita $\{\mathbf{u}(s),\, \mathbf{y}(s) \,|\, t_0 \le s \le t\}$.

Naturalmente la dinamica di $\mathbf{u}$ potrebbe non essere nota e comunque l'uso del modello aumentato porta ad un notevole aumento del carico computazionale. Ci si chiede se sia possibile, in analogia a quanto accade nel caso stazionario, calcolare il predittore di un passo $\hat{\mathbf{x}}_1(t+1 \mid t)$, usando solo il modello (9.142), assumendo noto che $\mathbf{u}$ è generato da un canale di reazione causale come in (9.144), senza però conoscere la struttura di H nè di $\mathbf{r}$. In particolare ci poniamo la seguente questione: è in generale corretto affermare che le equazioni del filtro si modificano semplicemente sostituendo la (9.104), con la (9.152), senza fare alcuna ipotesi ulteriore su $\mathbf{u}$?.

Purtroppo per t_0 finito la risposta a questa domanda è in generale negativa, a meno che nella (9.144) non sia $H \equiv 0$, il che corrisponde intuitivamente all' *assenza di reazione* (sull'intervallo semi-infinito $[t_0,\ +\infty)$). In questo caso, definiamo

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0) := \hat{E}\,\left[\mathbf{x}(t_0) \mid \mathbf{H}(\mathbf{u})\right], \qquad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) := \mathbf{x}(t_0) - \hat{\mathbf{x}}(t_0) \tag{9.149}$$

dove il sottospazio $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ è generato da tutta la storia di $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) := \overline{\text{span}}\,\{\mathbf{u}(s);\ s \ge t_0\} = \overline{\text{span}}\,\{\mathbf{r}(s);\ s \ge t_0\}$$

È facile allora convincersi che vale la decomposizione ortogonale

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \mathbf{H}(\mathbf{u}) \oplus \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}(t_0), \mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{9.150}$$

e proiettando l'uscita all'istante t del modello (9.142) su $\mathbf{H}(\mathbf{u})$ si ottiene così la decomposizione ortogonale corrispondente

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= CA^{t-t_0}\hat{\mathbf{x}}(t_0) + \sum_{t_0}^{t-1} CA^{t-1-s}B\mathbf{u}(s) + \\ &\quad + CA^{t-t_0}\tilde{\mathbf{x}}(t_0) \sum_{t_0}^{t-1} CA^{t-1-s}\mathbf{v}(s) + \mathbf{w}(t) = \\ &:= \quad \hat{\mathbf{y}}(t) \quad + \quad \tilde{\mathbf{y}}(t) \end{aligned} \tag{9.151}$$

dove $\hat{\mathbf{y}}$ è funzione solo dell' ingresso ed è descritta dall'equazione di stato

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t+1) &= A\,\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= C\,\hat{\mathbf{x}}(t) \qquad t \ge t_0\,, \end{cases}$$

mentre $\tilde{\mathbf{y}}$ è completamente scorrelata dall' ingresso ed è descritta da,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(t+1) &= A\,\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) &= C\,\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{w}(t), \qquad t \ge t_0\,, \end{cases}$$

Da notare che anche lo stato del modello originale (9.142) si può decomporre nella somma ortogonale $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$ degli stati dei due modelli (9.152) e (9.152).

Dato che le variabili di ingresso e le condizioni iniziali di questi due modelli sono completamente scorrelate, la proiezione ortogonale sulla storia passata dello stato "congiunto" $\mathbf{x}$ all'istante $t+1$, si ottiene calcolando separatamente la proiezione delle componenti $\hat{\mathbf{x}}(t)$ e $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ sui rispettivi spazi "passati" $\mathbf{H}_t(\hat{\mathbf{y}}) \subset \mathbf{H}(\mathbf{u})$ e su $\mathbf{H}_t(\tilde{\mathbf{y}}) \subset \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}(t_0), \mathbf{v}, \mathbf{w})$. In conclusione si ottiene il seguente risultato

Proposizione 9.8. *Se $H \equiv 0$, le stime dello stato, $\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t \mid t)$, del modello* (9.142)*, basate sull'osservazione congiunta della variabile di ingresso $\{\mathbf{u}(s) \,|\, t_0 \le s \le t\}$ e di uscita $\{\mathbf{y}(s) \,|\, t_0 \le s \le t\}$, si aggiornano nel tempo secondo il seguente algoritmo ricorsivo*

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t) = F\hat{\mathbf{x}}(t \mid t) + SR^{-1}\,\mathbf{y}(t) + B\,\mathbf{u}(t) \tag{9.152}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t+1) = \hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t) + L(t+1)\,\hat{\mathbf{e}}(t+1) \tag{9.153}$$

equivalente a

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t) = A\,\hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1) + B\mathbf{u}(t) + G(t)\hat{\mathbf{e}}(t) \tag{9.154}$$

dove $\hat{\mathbf{e}}(t) := \mathbf{y}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1)$ è l'innovazione del processo $\mathbf{y}$ rispetto al passato congiunto *di $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ e le matrici $L(t)$ e $G(t)$ sono calcolabili mediante le stesse formule dell'algoritmo di Kalman senza ingressi.*

La condizione iniziale dell'algoritmo è la stima non causale

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0 \mid t_0 - 1) = \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{E}\,[\mathbf{x}(t_0) \mid \mathbf{H}(\mathbf{u})]\ .$$

Si può osservare che anche se questo algoritmo sembra l'esatto analogo del filtro di Kalman usuale, la sua inizializzazione richiederebbe la soluzione di un problema di interpolazione basato su dati futuri che di fatto non sono disponibili in nessun istante finito. Come vedremo in seguito però, in ipotesi abbastanza blande, l'effetto delle condizioni iniziali sulla stima tende a svanire al crescere di $t - t_0$ e in pratica si può inizializzare l'algoritmo prendendo ad esempio $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = 0$. Notiamo anche che, se questo fosse veramente il caso, si avrebbe

$$\hat{E}\,[\mathbf{y}(t) \mid \mathbf{H}(\mathbf{u})] = \hat{E}\,[\mathbf{y}(t) \mid \mathbf{H}_t(\mathbf{u})]$$

che è l'analoga della condizione (7.41) del Cap. 7. Possiamo ben dire quindi che in questo caso il futuro di $\mathbf{u}$ da t in poi è condizionatamente incorrelato dal passato di $\mathbf{y}$ dato il passato (stretto) di $\mathbf{u}$ relativo all'intervallo $[t_0,\, t\,]$. In altri termini, solo se $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = 0$ si può dire che *se $H \equiv 0$ non c'è reazione da* $\mathbf{y}$ *a* $\mathbf{u}$.

Problema 9.4.

Si consideri il caso in cui nell'equazione di misura in (9.142), c'è accoppiamento diretto con la variabile di ingresso, i.e.

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \tag{9.155}$$

Ricavare le equazioni del filtro di Kalman supponendo che $H \equiv 0$.

Confrontare il risultato con le formule per il predittore di Wiener con ingressi osservabili discusso al Capitolo 7. ♢