

Lezione 8 — Maggio 8

Docente: Luca Schenato

Stesori: Guido Albertin, Elena Toffoli, Giancarlo Balda

Nella lezione precedente sono state introdotte le successioni

$$\begin{aligned}
 P_k &= \Phi_{\gamma_k}(P_k) & \bar{P}_k &= \mathbb{E}_{\gamma}[P_k] \\
 \tilde{P}_{k+1} &= \mathfrak{L}_{\gamma_k}(K, \tilde{P}_k) & \check{P}_k &= \mathbb{E}_{\gamma}[\tilde{P}_k] \\
 \check{P}_{k+1} &= \check{\mathfrak{L}}_{\lambda}(K, \check{P}_k) \\
 S_{k+1} &= \Phi_{\lambda}(S_k)
 \end{aligned}$$

le prime due dipendono direttamente dalla probabilità di perdita di pacchetti nel canale di trasmissione (γ_k) e sono relative rispettivamente al filtro di Kalman tempo variante ed al filtro a guadagno costante. Le ultime due invece hanno evoluzione deterministica che dipende dalla probabilità di arrivo dei pacchetti λ . In figura 8.1 viene mostrata una realizzazione dell'andamento delle prime due successioni. \tilde{P}_{k+1} è ottenuta utilizzando un filtro di Kalman con guadagno costante che essendo sub-ottimo rappresenta un limite superiore proprio per il filtro ottimo tempo variante di varianza $P_k \leq \tilde{P}_k$; tale disuguaglianza è valida anche nel caso si consideri l'aspettazione dei due termini quindi, sebbene non siamo in grado di calcolare esplicitamente $\bar{P}_k = \mathbb{E}_{\gamma}[P_k]$, possiamo affermare che certamente sarà inferiore a $\check{P}_k = \mathbb{E}_{\gamma}[\tilde{P}_k]$. Nel caso in cui quest'ultima diverga ($\lambda < \lambda_c$) non saremo in grado di decidere a proposito della convergenza di \bar{P}_k .

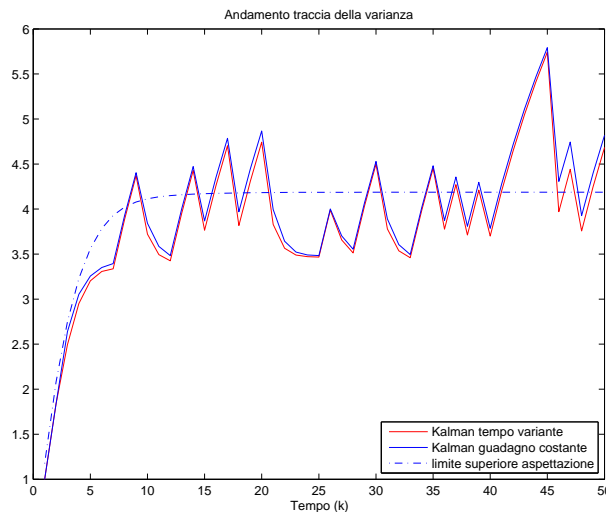


Figura 8.1. La successione \tilde{P}_{k+1} è ottenuta utilizzando un filtro di Kalman con guadagno costante che essendo sub-ottimo rappresenta un limite superiore proprio per il filtro ottimo $P_k \leq \tilde{P}_k$. La relazione è valida anche per l'aspettazione dei due termini.

8.1 Stimatore ottimo con sensori intelligenti e perdita di pacchetti

Gli stimatori che abbiamo considerato sinora si basano sulla trasmissione attraverso una rete di comunicazione digitale delle misure ottenute dal sistema istante per istante con la possibile perdita di alcuni pacchetti di dati. Invece di trasmettere tutte le misure si può pensare di calcolare e inviare sul canale la stima dello stato; la stima fatta all'interno del sensore contiene l'informazione di tutte le misure fino all'istante k

$$\mathbb{E}[x_{k+1} | \underbrace{y_0, \dots, y_k}_{\text{tutte le misure senza perdita}}] = \mathbb{E}[x_{k+1} | \hat{x}_{k|k}] \quad (8.1)$$

e offre per questo motivo prestazioni migliori se confrontate con quelle del filtro di Kalman tempo variante soggetto a perdita di pacchetti visto in precedenza. Lo schema a cui si fa riferimento è rappresentato in figura 8.2.

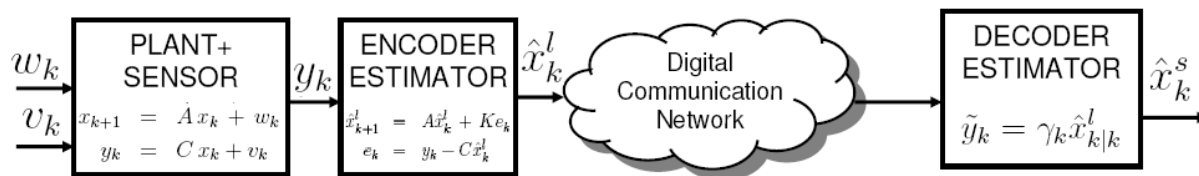


Figura 8.2. Rete digitale per la trasmissione di dati

Per contro questa tecnica è applicabile solo se il sensore possiede risorse computazionali necessarie al calcolo della stima ed è in grado di contenere tutte le misure raccolte; sensori con queste caratteristiche vengono in genere definiti intelligenti (o *smart*). Altre ipotesi sulle quali si basa quest'architettura sono che non vi siano perdite prima del calcolo della stima e che le misure vengano compiute da un solo sensore; nel caso vi siano più sensori che raccolgono misure sarà piuttosto complesso ricostruire sulla base delle sole stime locali quella globale. All'interno del sensore la stima dello stato viene calcolata sulla base delle tradizionali equazioni del filtro di Kalman:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1}^l &= \mathbb{E}[x_{k+1} | y_0, \dots, y_{k+1}] = A\hat{x}_{k|k}^l + K_{k+1}(y_{k+1} - CA\hat{x}_{k|k}^l) \\ P_{k+1|k}^l &= \Phi_1(P_{k|k-1}) \\ K_k^l &= P_k^l C^T (CP_k^l C^T + R)^{-1}. \end{aligned}$$

Sotto opportune condizioni il guadagno del filtro converge ($K_k \rightarrow K_\infty$) ed in questo caso risulta computazionalmente meno oneroso utilizzare tale valore limite rinunciando così all'ottimalità del filtro e quindi peggiorandone le prestazioni. Lo stato stimato verrà poi trasmesso sul canale sul quale si potrà avere perdita di pacchetti; nel caso in cui la stima non venga

ricevuta per l'aggiornamento ci si baserà sull'evoluzione dello stato in catena aperta

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k}^s &= A\hat{x}_{k|k}^s = A\hat{x}_{k|k}^l + K_{k+1}(1 - CA\hat{x}_{k|k}^l) \\ P_{k+1}^s &= \mathbb{E}[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}^s)(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}^s)^T | \gamma_0, \dots, \gamma_k]\end{aligned}$$

dove

$$\hat{x}_{k|k}^s = \gamma_k \hat{x}_{k|k}^l + (1 - \gamma_k) A \hat{x}_{k-1|k-1}^l$$

mentre γ_k è la variabile aleatoria che rappresenta la probabilità che alcune stime non vengano ricevute. Come accennato in precedenza questa tecnica fornisce un limite inferiore alle prestazioni del filtro ottimo tempo variante basato sulle misure; tale disuguaglianza continua a valere anche se si considera l'aspettazione di entrambi i termini

$$P_k^s \leq P_k \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[P_k^s] \leq \mathbb{E}[P_k].$$

Per il calcolo di $\mathbb{E}[P_k^s]$ è necessario introdurre l'errore di stima

$$\begin{aligned}e_{k+1|k}^s &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}^s = (1 - \gamma_k + \gamma_k)x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}^s = \\ &= \gamma_k x_{k+1} + (1 - \gamma_k)(Ax_k + w_k) - A(\gamma_k \hat{x}_{k|k}^l + (1 - \gamma_k)\hat{x}_{k|k-1}^s) = \\ &= \gamma_k \underbrace{(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}^l)}_{\text{errore al sensore}} + (1 - \gamma_k)A \underbrace{(x_k - \hat{x}_{k|k-1}^s)}_{\text{errore allo stimatore}} + (1 - \gamma_k)w_k\end{aligned}$$

da cui la varianza

$$\begin{aligned}P_{k+1}^s &= \gamma_k P_{k+1}^l + (1 - \gamma_k)A(x_k - P_k^s)A^T + (1 - \gamma_k)Q = \\ &= \mathcal{L}_{\gamma_k}^s(P_k^s).\end{aligned}$$

Rifacendoci a quanto visto nelle lezioni precedenti abbiamo ora a disposizione due successioni che ci permettono di limitare, sia superiormente (con stimatore a guadagni costanti) che inferiormente (con sensori intelligenti), una quantità che non siamo in grado di calcolare in maniera diretta

$$P_k^s \leq P_k \leq \tilde{P}_k,$$

tale relazione vige anche per la media delle stesse successioni, in particolare

$$\mathbb{E}[P_k^s] \leq \mathbb{E}[P_k] \leq \mathbb{E}[\tilde{P}_k].$$

Sia P_k che P_k^s sono variabili aleatorie funzioni dei valori di γ_k . Se γ_k è di tipo Bernoulliano con $\mathbb{P}[\gamma_k = 1] = \lambda \in [0, 1]$ possiamo ricavare una forma esplicita della media della successione P_k^s , che indicheremo con $\bar{P}_k^s = \mathbb{E}_\gamma[P_k^s]$, allo scopo di valutarne la convergenza

$$\begin{aligned}\bar{P}_{k+1}^s &= \lambda \bar{P}_{k+1}^l + (1 - \lambda)A\bar{P}_k^s A^T + (1 - \lambda)Q = \\ &= \sqrt{1 - \lambda} A \bar{P}_k^s \sqrt{1 - \lambda} A^T + D_k = \\ &= \mathcal{L}_\lambda^s(\bar{P}_k)\end{aligned}$$

con $D_k = (1 - \lambda)Q + \lambda\bar{P}_{k+1}^l \geq 0$. Dato che $P_k^l \rightarrow P_\infty^l$, dove $P_\infty^l = \Phi_1(P_\infty^l)$, \bar{P}_k^s converge al limite per $k \rightarrow \infty$ se e solo se $A_s = \sqrt{1 - \lambda}A$ è stabile ovvero se solo se

$$\lambda > 1 - \frac{1}{\max_i |\sigma_i(A)|^2}.$$

La convergenza di $\tilde{P}_k = \mathbb{E}_\gamma[\tilde{P}_k]$, come visto in precedenza, è garantita da $\lambda > \lambda_c$. In figura 8.3 viene mostrato l'andamento delle tre successioni. \tilde{P}_{k+1} è ottenuta utilizzando un filtro di Kalman con guadagno costante che essendo sub-ottimo rappresenta un limite superiore proprio per il filtro ottimo tempo variante, al contrario P_{k+1}^s offre un limite inferiore della stessa P_k . Quindi, sebbene non siamo in grado di calcolare esplicitamente $\bar{P}_k = \mathbb{E}_\gamma[P_k]$, possiamo affermare che certamente il suo andamento sarà compreso tra quello di $\tilde{P}_k = \mathbb{E}_\gamma[\tilde{P}_k]$ e quello di $\bar{P}_k^s = \mathbb{E}_\gamma[P_k^s]$. Nel caso in cui quest'ultima diverga certamente divergerà anche \bar{P}_k se invece a divergere dovesse essere \tilde{P}_k non saremo in grado di dire niente sulla convergenza di \bar{P}_k .

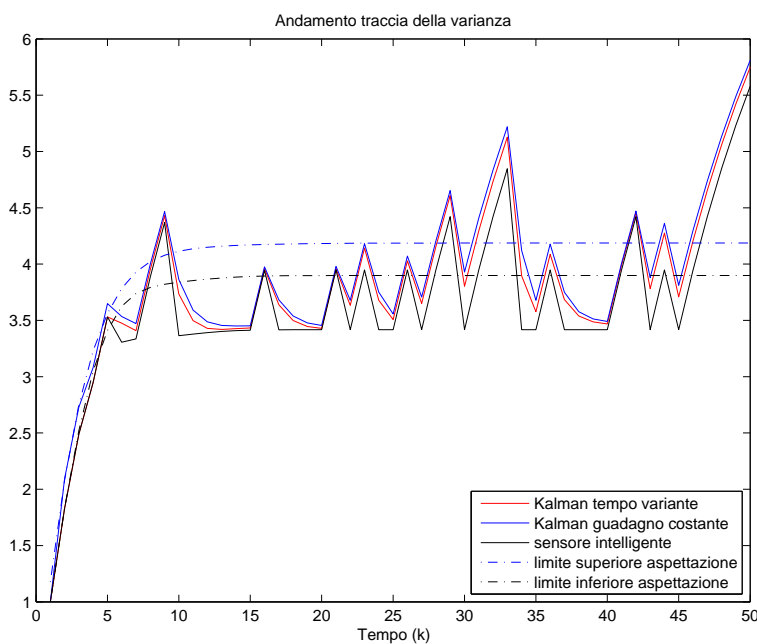


Figura 8.3. La successione \tilde{P}_{k+1} è ottenuta utilizzando un filtro di Kalman con guadagno costante che essendo sub-ottimo rappresenta un limite superiore proprio per il filtro ottimo, al contrario P_{k+1}^s offre un limite inferiore della stessa P_k da cui $P_k^s \leq P_k \leq \tilde{P}_k$; tale disuguaglianza è valida anche nel caso si consideri l'aspettazione dei termini quindi.

8.2 Stimatori ottimi con ritardo e perdita di pacchetti



Figura 8.4. Rete digitale per la trasmissione di dati

Passiamo ora ad analizzare il caso in cui il canale di trasmissione introduce un ritardo aleatorio τ_k ; un ritardo infinito sarà assimilabile alla perdita del pacchetto di dati. Il nostro scopo sarà quello di stimare lo stato al generico istante t

$$\hat{x}_{t|t} = \mathbb{E}[x_t | \text{misure arrivate fino al tempo } t].$$