Esercitazione 2

Guido Albertin
Elena Toffoli
Giancarlo Baldan

20 maggio 2007

Inseguimento di un veicolo con perdita di misure

1

In generale non è possibile calcolare la probabilità critica di arrivo dei pacchetti in maniera analitica. E' tuttavia possibile definirne un limite superiore ed uno inferiore:

$$\lambda_{min} \leq \lambda_c \leq \lambda_{max}$$

nel nostro caso

$$\lambda_{min} = 1 - \frac{1}{\sigma^2_{max}(A)} = 0 \qquad \lambda_{min} = 1 - \frac{1}{\Pi_j \sigma_j(A)} = 0$$

dove con σ_j si intendono i soli autovalori instabili di A. Avremo quindi $\lambda_c = 0$.

2

Visualizzando l'andamento della traccia della varianza d'errore ($P_{k+1|k}$) nel caso si implementino le equazioni dello stimatore ottimo tempo variante si osserva che essa non è convergente pur risultando limitata. Infatti ogniqualvolta una misura viene persa la varianza d'errore aumenta al contrario non appena le misure arrivano correttamente tende a calare.

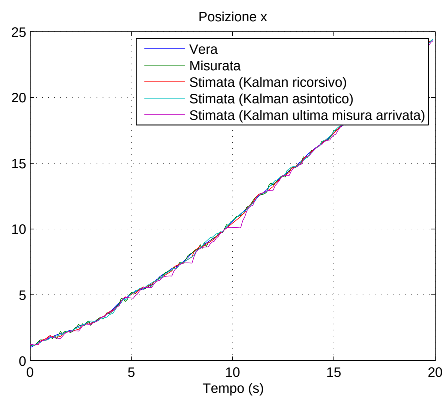
3

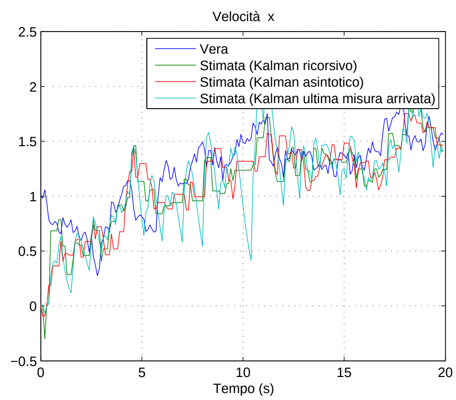
Lo stimatore ottimo tempo variante offre prestazioni migliori rispetto a quello con guadagno statico infatti l'andamento del primo è sempre al di sotto del secondo. Per quanto riguarda lo scostamento di $\tilde{P}_{k+1|k}$ dalla sua media si osserva che essa si attesta su valori superiori alla media quando uno o più pacchetti di dati non vengono ricevuti, su valori al di sotto della media stessa quando vengono correttamente ricevute la misure.

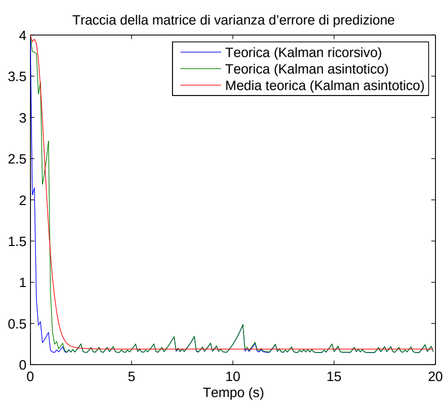
4

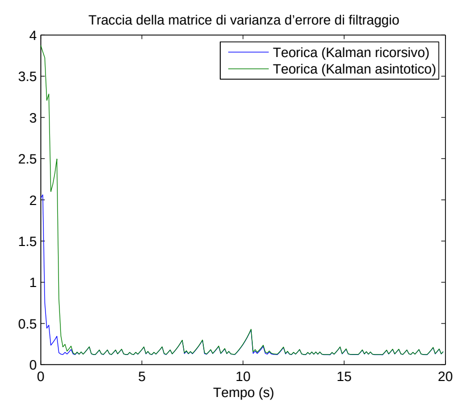
Lo stimatore che utilizza il valore di misura precedente nel caso in cui un pacchetto venga perso ha prestazioni, in termini di valore empirico, inferiori rispetto ai precedenti come si evince dall'osservazione dei grafici relativi alla posizione e alla velocità del veicolo. Quando non viene ricevuta una misura la posizione lungo entrambe le direzioni non cambia ma si riporta immediatamente nel punto del piano corretto non appena viene ricevuta una misura provocando una grossa variabilità per quanto riguarda la velocità.

Tutte le osservazioni esposte finora sono avvalorate dai grafici ottenuti e che sono di seguito riportati





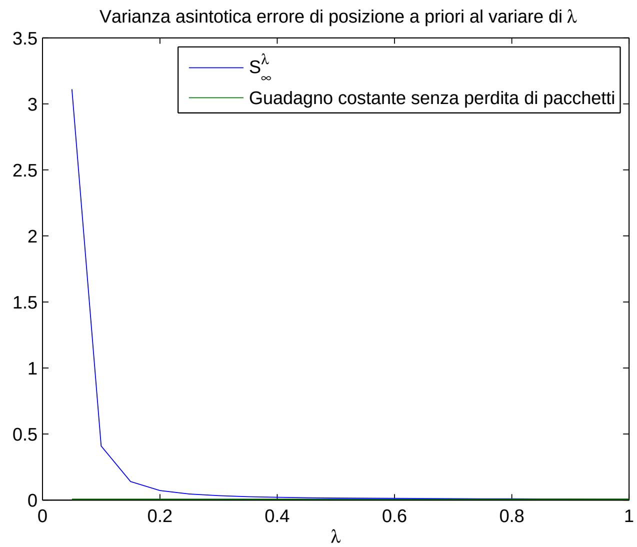




5

$S_{\infty}^{\lambda}(1,1)$ rappresenta la varianza d'errore sulla posizione nella direzione x.

Come si vede dall'andamento riportato, la prestazione degrada piuttosto rapidamente al decrescere di λ pur non divergendo (gli unici problemi di convergenza si potrebbero avere per $\lambda = 0$ essendo $\lambda_c = 0$). Il valore $S_{\infty}^{1}(1,1)$ cioè con $\lambda = 1$ corrisponde alla

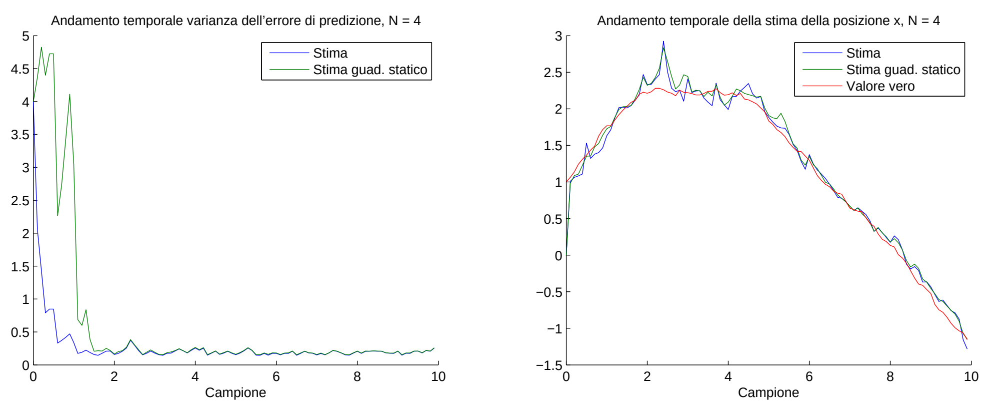


varianza d'errore ottenuto con lo stimatore ottimo a guadagno costante nel caso in cui non vi sia perdita di pacchetti.

Inseguimento di un veicolo con ritardo aleatorio di misure

Sono state implementate le equazioni ricorsive per il calcolo sia del filtro tempo variante che del filtro con guadagni statici nel caso di ritardi aleatori sull'arrivo dei pacchetti con la possibilità di impiegare un buffer di lunghezza impostabile.

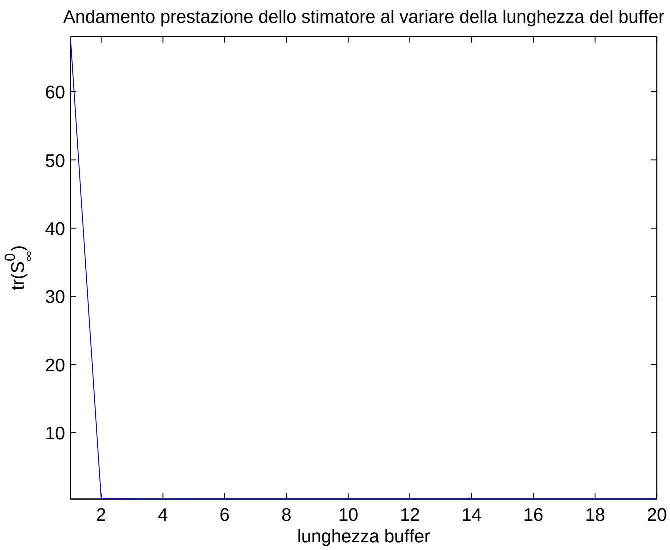
2



Nel grafico riportato sono visualizzati a sinistra gli andamenti delle tracce varianze dell'errore di predizione a priori per il filtro tempo variante e per il filtro a guadagni costanti. Notiamo che la traccia della varianza nel primo caso sia sempre inferiore rispetto al caso lineare subottimo; inoltre si nota come in corrispondenza a pacchetti persi la varianza cresca.

3

Al variare della lunghezza del buffer di memoria si è prima risolta l'equazione asintotica e poi le relazioni ricorsive; la traccia della varianza S^0_∞ è riportata nella figura che segue.



Si nota come esista una soluzione per qualsiasi N (ricordiamo che $\lambda_c = 0$ quindi non esiste un limite inferiore per la stabilità dello stimatore) e che la traccia della varianza risulta stazionaria per $N \geq 4$: questo segue dal fatto che la particolare distribuzione λ che abbiamo analizzato definisce un numero massimo di ritardi entro i quali aspettarsi un pacchetto. Difatti dopo quattro istanti non è possibile migliorare ulteriormente la stima.

Stima Distribuita

Si consideri il classico problema della miglior stima lineare della realizzazione di un vettore aleatorio $\mathbf{x}$ di media nulla e varianza $\mathbf{P}$. Di tale vettore si conosce una misura $\mathbf{y}$ ottenuta mediante la relazione

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{w} \tag{1}$$

in cui $\mathbf{w}$ è un vettore aleatorio di rumore scorrelato da $\mathbf{x}$ di media nulla e varianza $\mathbf{R}$.

Come noto, la soluzione di tale problema prevede la sola conoscenza dei momenti congiunti del secondo ordine tra $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ e porge, come migliore stima di $\mathbf{x}$, la quantità

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Sigma_{xy}} \mathbf{\Sigma_{y}}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{y}. \tag{2}$$

Supponiamo ora di dividere il vettore delle misure $\mathbf{y}$ in due parti che possono essere pensate come misure ottenute da due distinti sensori

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{x} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

In questo caso, ricalcolando attentamente le matrici $\mathbf{\Sigma_{xy}}$ e $\mathbf{\Sigma_y}$, la stima ottima di $\mathbf{x}$ in base a tutte le misure risulta

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{PC}_1^T & \mathbf{PC}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{PC}_1^T + \mathbf{R}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{PC}_2^T + \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{C}_2\mathbf{PC}_1^T + \mathbf{R}_{21} & \mathbf{C}_2\mathbf{PC}_2^T + \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

in cui $\mathbf{R}_1$ ed $\mathbf{R}_2$ sono le varianze dei rumori di misura $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ ed $\mathbf{R}_{12}$ e $\mathbf{R}_{21}$ sono le loro covarianze incrociate. Naturalmente è possibile ottenere le stime di $\mathbf{x}$ in base solamente alle misure $\mathbf{y}_1$ o $\mathbf{y}_2$ mediante applicazione della relazione (2):

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{PC}_1^T(\mathbf{C}_1\mathbf{PC}_1^T + \mathbf{R}_1)^{-1}\mathbf{y}_1$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{PC}_2^T(\mathbf{C}_2\mathbf{PC}_2^T + \mathbf{R}_2)^{-1}\mathbf{y}_2$$

In questa sede si vuole trovare un modo per calcolare la stima di $\mathbf{x}$ in base a tutte le misure senza utilizzarle direttamente ma avendo a disposizione solo le due stime $\hat{\mathbf{x}}_1$ e $\hat{\mathbf{x}}_2$. Una condizione sufficiente affinché ciò sia possibile è che la covarianza incrociata dei due rumori di misura sia nulla. In tale ipotesi la (4) diviene

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{PC}_1^T & \mathbf{PC}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{PC}_1^T + \mathbf{R}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{PC}_2^T \\ \mathbf{C}_2\mathbf{PC}_1^T & \mathbf{C}_2\mathbf{PC}_2^T + \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Per semplicità di notazione d'ora in poi verranno utilizzate le seguenti matrici:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{C}_1\mathbf{PC}_1^T + \mathbf{R}_1$$

$$\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{C}_2\mathbf{PC}_2^T + \mathbf{R}_2$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{C}_1\mathbf{PC}_2^T$$

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_2\mathbf{PC}_1^T$$

Applicando ora il lemma d'inversione di matrice[1] alla (5) si ottiene

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\mathbf{PC}_1^T & \mathbf{PC}_1^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{A}}^{-1}+\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1} & -\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1} \\ -\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1} & \left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}$$

$$= \left[\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}+\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}-\mathbf{PC}_2^T\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\right]\mathbf{y}_1 +$$
$$+\left[\mathbf{PC}_2^T-\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right]\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\mathbf{y}_2$$
$$= \left[\mathbf{PC}_1^T+\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{PC}_1^T-\mathbf{PC}_2^T\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\mathbf{C}_2\mathbf{PC}_1^T\right]\overline{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{y}_1 +$$
$$+\left[\mathbf{PC}_2^T-\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right]\left[\overline{\mathbf{D}}^{-1}-\overline{\mathbf{D}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}\left(\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{D}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}-\overline{\mathbf{A}}\right)^{-1}\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{D}}^{-1}\right]\mathbf{y}_2$$
$$= \left[\mathbf{I}+\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\mathbf{C}_2-\mathbf{PC}_2^T\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\mathbf{C}_2\right]\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{y}_1 +$$
$$+\left[\mathbf{PC}_2^T-\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{PC}_2^T\right]\left[\mathbf{I}-\overline{\mathbf{D}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}\left(\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{D}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}-\overline{\mathbf{A}}\right)^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{PC}_2^T\right]\overline{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{y}_2$$
$$= \left[\mathbf{I}+\mathbf{P}\left(\mathbf{C}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_2^T\right)\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\mathbf{C}_2\right]\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{y}_1 +$$
$$+\left(\mathbf{I}-\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{C}_1\right)\left[\mathbf{I}-\mathbf{PC}_2^T\overline{\mathbf{D}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}\left(\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{D}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}-\overline{\mathbf{A}}\right)^{-1}\mathbf{C}_1\right]\mathbf{PC}_2^T\overline{\mathbf{D}}^{-1}\mathbf{y}_2$$

Ricordando ora la definizione delle matrici $\overline{\mathbf{A}}$ e $\overline{\mathbf{D}}$ ed introducendo le

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = \mathbf{I}+\mathbf{P}\left(\mathbf{C}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_2^T\right)\left(\overline{\mathbf{D}}-\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{A}}^{-1}\overline{\mathbf{B}}\right)^{-1}\mathbf{C}_2$$

$$\mathbf{\Gamma}_\beta = \left(\mathbf{I}-\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{C}_1\right)\left[\mathbf{I}-\mathbf{PC}_2^T\overline{\mathbf{D}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}\left(\overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{D}}^{-1}\overline{\mathbf{C}}-\overline{\mathbf{A}}\right)^{-1}\mathbf{C}_1\right],$$

si perviene facilmente al risultato cercato:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Gamma}_\alpha\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{\Gamma}_\beta\hat{\mathbf{x}}_2. \tag{6}$$

Si osservi che il "trucco" che consente di ottenere questo risultato è la possibilità di raccogliere a destra dalle formule ottenute le matrici $\mathbf{PC}_1^T\overline{\mathbf{A}}^{-1}$ e $\mathbf{PC}_2^T\overline{\mathbf{D}}^{-1}$. Ciò è possibile non solo nell'ipotesi in cui $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{21}^T = 0$ ma, ad esempio, anche nel caso in cui la matrice di covarianza incrociata sia fattorizzabile nel modo seguente[2]

$$\mathbf{R}_{12} = \gamma\mathbf{C}_1\mathbf{PC}_2^T,$$

[1]In questo caso tutte le matrici in gioco sono invertibili ed i lemmi utilizzati sono sempre applicabili
[2]Questa fattorizzazione è certamente fattibile se i rumori $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ sono scalari

con γ uno scalare qualsiasi. In questo caso infatti le formule cambiano solo per la presenza di un fattore $(1+\gamma)$ che, essendo scalare, può essere facilmente commutato e non impedisce i raccoglimenti. L'incorrelazione tra i due rumori di misura non è quindi una condizione necessaria.

La generalizzazione al caso in cui si disponga di N sensori e quindi di N vettori di misure $\mathbf{y}_i$ è piuttosto semplice. La stima complessiva, in virtù di quanto appena visto, può sempre scriversi come

$$\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Gamma}_\alpha^1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_\beta^1 \hat{\mathbf{x}}^{N-1}$$

dove $\hat{\mathbf{x}}^{N-1}$ è la stima ottima di $\mathbf{x}$ utilizzando le misure $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \ldots, \mathbf{y}_N$ e l'apice unitario nelle matrici $\boldsymbol{\Gamma}$ sta ad indicare il fatto che nel loro calcolo si sono utilizzate le matrici che si ottengono partizionando le misure in $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \ldots, \mathbf{y}_N$.

A questo punto si può iterare il procedimento applicandolo alla stima ottima $\hat{\mathbf{x}}^{N-1}$. Quando si arriva alla stima ottima basata solamente sulle misure $\mathbf{y}_N$, si perviene alla seguente relazione

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{N} \left[\prod_{j=1}^{i-1} \Gamma_\beta^j \right] \Gamma_\alpha^i \hat{\mathbf{x}}_i,$$

che consiste, come si voleva, in una combinazione lineare opportunamente pesata delle stime ottenute in base a ciascuna misura.