PSC: Progettazione di sistemi di controllo	**III Trim. 2006**

Esercitazione 2 — Maggio 4

Docente: Luca Schenato	*Stesore: Luca Schenato*

2.1 Stimatori soggetti a perdita di pacchetti e ritardo aleatorio

Esercizio 1: Inseguimento di un veicolo con perdita di misure Si consideri lo stesso scenario del Esercizio 1 nell'Esercitazione 1 con le stesse condizioni iniziali. Si vuole verificare la prestazione di vari tipi di stimatori soggetti a perdita di pacchetti di osservazione. Si assuma che i pacchetti vengano persi con una probabilita' $\mathbb{P}[\gamma_k = 1] = \lambda$, dove γ_k e' stato definito a lezione. Si utilizzi pure la funzione `randbin` in MATLAB a disposizione nel file *Matlab_Es2.zip* per la generazione della variabile γ_k

1. Quale e' la probabilita' critica di arrivo dei pacchetti per questo tipo di sistema?

2. Si implementino le equazioni dello *stimatore ottimo tempo variante* per $q = r = 1$ e $\lambda = 0.5$. Si facciano alcune simulazioni per verificare la prestazione dello stimatore con almeno 100 passi. Si inizializzi[1] la posizione del veicolo con
$$x_0 = [1\ 1\ 2\ 1]^T.$$
La varianza di errore $P_{k+1|k} = \mathbb{E}[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T|\gamma_0, \ldots, \gamma_k]$, calcolabile come $P_{k+1|k} = \Phi_{\gamma_k}(P_{k|k-1})$, converge? A questo scopo si consiglia di visualizzare la traccia $trace(P_{k+1|k})$ in funzione del tempo k ?

3. Si implementi le equazioni di un *stimatore ottimo statico* del tipo:
$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + \gamma_{k+1}K^*(y_{k+1} - CA\tilde{x}_{k|k})$$
con guadagno del filtro K^* ottenuto tramite l'operatore Φ_λ definito in classe. A tal scopo si implementi la sequenza $S_{k+1} = \Phi_\lambda(S_k)$, $S_0 = 0$, e si iteri l'operatore fino a che $S_k \to S_\infty$[2]. Il guadagno statico ottimo e' dato da
$$K^* = S_\infty C^T(CS_\infty C^T + R)^{-1}.$$
Si calcoli, per ogni sequenza di perdita di pacchetti, l'errore dello stimatore statico dato da $\tilde{P}_{k+1|k} = \mathbb{E}[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})^T|\gamma_0, \ldots, \gamma_k]$ e calcolabile come $\tilde{P}_{k+1|k} = \mathcal{L}_{\gamma_k}(K^*, \tilde{P}_{k|k-1})$

[1] Ovviamente lo stimatore va inizializzato con $\hat{x}_0 = 0$.

[2] Un centinaio di iterazioni dovrebbero essere sufficienti, comunque per sicurezza si faccia il grafico di $trace(S_k)$ come funzione di k e si verifichi che abbia raggiunto un valore costante.

Si calcoli anche la successione $T_{k+1} = \overline{\mathcal{L}}_\lambda(K^*, T_k)$ che corrisponde all'aspettazione dell'errore $T_k = \mathbb{E}[\tilde{P}_{k+1|k}]$. Si plottino nello stesso grafico $trace(T_k)$, $trace(\tilde{P}_{k+1|k})$ e $trace(P_{k+1|k})$ come funzione di k ottenute con la stessa realizzazione del processo di arrivo $\{\gamma_k\}$ per almeno un centinaio di passi. Quale e' la differenza in termini di prestazione tra lo stimatore ottimo tempo variante e quello ottimo statico, cioe' tra $trace(\tilde{P}_{k+1|k})$ e $trace(P_{k+1|k})$? Di quanto si discosta $trace(\tilde{P}_{k+1|k})$ dalla sua media T_k?

4. Come proposto in classe da uno di voi, si consideri un ulteriore *stimatore che utilizza il valore di misura precedente* se un pacchetto viene perso, cioe'

$$y_k^s = \begin{cases} y_k & \text{se } \gamma_k = 1 \\ y_{k-1}^s & \text{se } \gamma_k = 0 \end{cases}$$

Si noti che c'e' sempre una correzione sulla stima anche quando il pacchetto non e' arrivato. Lo stimatore piu' naturale da usare e' uno stimatore con guadagno statico di Kalman, cioe:

$$\breve{x}_{k+1|k+1} = A\breve{x}_{k|k} + K_{klm}(y_{k+1}^s - CA\breve{x}_{k|k})$$

Si visualizzi nel piano x-y la dinamica del veicolo reale e dei tre veicoli virtuali che utilizzano i tre stimatori per la posizione e velocita', cioe' $\hat{x}_{k|k}$, $\tilde{x}_{k|k}$ e $\breve{x}_{k|k}$. Qual'e' la prestazione di quest'ultimo rispetto agli altri due?

5. Si calcoli[3] $S_\infty^\lambda = \Phi_\lambda(S_\infty^\lambda)$ per vari valori di $\lambda \in [0, 1]$, e si faccia il grafico di $S_\infty^\lambda(1, 1)$ rispetto a λ. A cosa corrisponde $S_\infty^\lambda(1, 1)$? Come degrada la prestazione al variare decrescere di λ ?

Esercizio 2: Inseguimento di un veicolo con ritardo aleatorio di misure (FACOLTATIVO) Si consideri nuovamente il solito problema di inseguimento di veicolo con condizioni iniziali come nell'esercizio precedente. In questo caso consideriamo il caso di simultanea perdita di pacchetti e ritardo aleatorio. Assumiamo che l'arrivo dei pacchetti sia i.i.d. con funzione di probabilita' di arrivo $\lambda_h = \mathbb{P}[\tau_k \leq h]$ data da:

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = 0.5, \lambda_h = 0.75, h \geq 3$$

Questa distribuzione corrisponde ad un ritardo massimo dei pacchetti che arrivano di $\tau_{max} = 3$ e probabilita' di perdita di pacchetto $\lambda_{loss} = 1 - 0.75 = 0.25$.

1. Si implementino le equazioni dello *stimatore ottimo tempo variante* $\hat{x}_{t|t}^t$ e si calcoli anche la sua covarianza di errore $P_{t+1|t}^t$ in maniera ricorsiva utilizzando un buffer di memoria finita. Si utilizzino pure tutte le funzioni MATLAB fornite ed in particolare esempio_ritardo_aleatorio.m.

[3] Si facciamo un centinaio di iterazioni dell'operatore $S_{k+1}^\lambda = \Phi_\lambda(S_k^\lambda)$ e si utilizzi S_{100}^λ come stima di S_∞^λ.

2. Si implementino le equazioni dello *stimatore ottimo con guadagni costanti* e il corrispondente errore di stima $\tilde{P}^t_{t+1|t}$ e lo si confronti[4] con quello dello stimatore ottimo tempo variante $P^t_{t+1|t}$ per le stesse realizzazioni di rumore e ritardo dei pacchetti.

3. Si calcoli la prestazione dello stimatore V_0^N al variare della lunghezza N del buffer come indicato in [Schenato:06].

4. Si visualizzi nel piano x-y la dinamica del veicolo reale e del veicolo virtuale ottenuto con lo stimatore ottimo tempo variante e con guadagni costanti.

Esercizio 3: Stima distribuita Si svolga l'Esercizio 2.6 presente nel libro del. Prof. Picci "Filtraggio Statistico".

[4] Si traccino i grafici delle tracce come funzione del tempo t.