PSC: Progettazione di sistemi di controllo	**III Trim. 2006**

Esercitazione 1 — Aprile 27

Docente: Luca Schenato *Stesore: Luca Schenato*

1.1 Il Filtro di Kalman

Esercizio 1: Inseguimento di un veicolo In questo esercizio di andra' ad applicare il filtro di Kalman per la stima di posizione di un veicolo mobile di cui non si conosce il comportamento a priori. A tele scopo consideriamo un veicolo bidimesionale la cui dinamica e' data da $\ddot{p_x} = u_x$ e $\ddot{p_y} = u_y$, dove (p_x, p_y) e' la sua posizione rispetto ad un sistema di riferimento fisso e (u_x, u_y) sono le forze generate dai suoi motori. Si tratta in pratica della dinamica di un oggetto di massa unitaria senza attrito. Poiche' gli ingressi non sono noti a priori, una tecnica molto usata e' quella di modellare un comportamento non noto a priori ussumendo che gli ingressi (u_x, u_y) siano delle variabili aleatorie gaussiane. Per prima cosa si discretizza la dinamica con tempo di campionamento $T = 0.1$ e si utilizza una rappresentazione in spazio di stato dove lo stato $x = (p_x, v_x, p_y, v_y) \in \mathbb{R}^4$, dove (v_x, v_y) sono le velocita' istantanee. La dinamica discretizzata e' data da:

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k,\ w_k \sim \mathcal{N}(0, Q),\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ Q = q{*}0.01 \begin{bmatrix} 0.01 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $q \in \mathbb{R}, q \geq 0$ e' l'effetto di (u_x, u_y) e' stato sostituito dal disturbo di processo w_k. Si assume poi che il processo di misura $y = (y_x, y_y)$ corrisponda alla misura della posizione (p_x, p_y) del veicolo soggetto a rumore gaussiano, cioe':

$$y_k = Cx_k + v_k,\ v_k \sim \mathcal{N}(0, R),\ \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \ R = r \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

dove $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$. Si noti come, per costruzione, la dinamica e il processo di misura lungo l'asse x e lungo l'asse y sia disaccoppiata e identica, e quindi si potrebbe scomporre la dinamica del sistema di dimensione $n = 4$ come l'unione di due sistemi uguali di dimensione $n = 2$, semplificando notevolmente le equazioni. Si assuma infine che la posizione iniziale non sia nota ma si possa approssimare come una variabile aleatoria gaussiana:

$$x_0 \sim \mathcal{N}(0, P_0),\ \ P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si implementino le equazioni del filtro di Kalman per $q = r = 1$. Si facciano alcune simulazioni per verificare la prestazione dello stimatore con almeno 100 passi. Si inizializzi[1] la posizione del veicolo con
$$x_0 = [1\ 1\ 2\ 1]^T.$$
La varianza di errore $P_{k+1|k}$ converge ? E' la matrice a cui converge strettamente definita positiva ? E' unica ? Quale e' il guadagno del del filtro di Kalman a regime ?

2. Si implementi le equazioni di un filtro statico con guadagno del filtro ottenuto dal filtro di Kalman a regime. Si confrontino le prestazioni di questo stimatore con lo stimatore di Kalman utilizzando le stesse condizioni iniziali e la stessa realizzazione delle variabili aleatorie, cioe' w_k, v_k devono essere gli stessi[2].

3. Si visualizzi nel piano x-y la dinamica del veicolo reale e di un veicolo virtuale che utilizza la stimatore per la posizione e velocita'. Si usino la funzione $\mathsf{plot\_car}(p_k^x, p_k^y, \theta_k)$ calcolando l'angolo di orientamento tramite la funzione $\theta_k = \mathsf{atan2}(v_k^y, v_k^x)$. Si sovrapponga al veicolo virtuale il grafico dell'ellisse di confidenza di probabilita' 99% solitamente detto 3σ che si ottiene con $\mathsf{plot\_ellipse}(p_k^x, p_k^y, 9 * P_{k|k}^{pos})$, cioe' con probabilita' del 99% la posizione reale del veicolo e' all'interno dell'ellisse, dove
$$P_{k|k}^{pos} = \begin{bmatrix} P_{k|k}(1,1) & P_{k|k}(1,3) \\ P_{k|k}(3,1) & P_{k|k}(3,3) \end{bmatrix}.$$

4. Si verifichi che la varianza campionaria d'errore all'istante k data da $P_{k|k}^{emp}$ converge verso l'aspettazione d'errore $P_{k|k} = \lim_{M\to\infty} P_{k|k}^{emp}$, dove
$$P_k^{emp} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(x_k(m) - \hat{x}_{k|k}(m))(x_k(m) - \hat{x}_{k|k}(m))^T.$$
dove M sono il numero di simulazioni, cioe' e' necessario calcolare $x_k(m), \hat{x}_{k|k}(m)$ per diverse realizzazioni dei rumori v_k, w_k e poi mediare. Si verifichi inoltre che la varianza campionaria calcolata negli istanti precedenti (quindi in una sola simulazione) $\widetilde{P}_{k|k}^{emp} = \frac{1}{k}\sum_{h=1}^{k}(x_h - \hat{x}_{h|h})(x_h - \hat{x}_{h|h})^T$ converge alla varianza d'errore a regime $P_\infty = \lim_{k\to\infty} P_{k|k} = \lim_{k\to\infty} \widetilde{P}_{k|k}^{emp}$. La varianza campionaria si puo' calcolare in modo iterativo nel modo seguente
$$\widetilde{P}_{k+1|k+1}^{emp} = \frac{k}{k+1}\widetilde{P}_{k|k}^{emp} + \frac{1}{k+1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k+1})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k+1})^T,\ \widetilde{P}_0 = 0$$

[1] Ovviamente lo stimatore va inizializzato con $\hat{x}_0 = 0$.

[2] In MATLAB le variabili aleatorie (v_k, w_k) si possono generare facilmente tramite i comandi $w_k = \mathsf{sqrtm}(Q) * \mathsf{randn}(4,1), v_k = \mathsf{sqrtm}(R) * \mathsf{randn}(2,1)$.

5. Si ripetano i punti precedenti con $r = 0, q = 1$. Cosa cambia? Posso ancora usare il filtro statico con guadagno del filtro di Kalman a regime?

6. Si ripetano i punti precedenti con $r = 1, q = 0$. Cosa cambia? Posso ancora usare il filtro statico con guadagno del filtro di Kalman a regime? Perche'? Si riesce a dare una spiegazione pratica?

Esercizio 2: Stima di parametri costanti Sebbene il filtro di Kalman sia espressamente ottenuto per processi dinamici, puo' essere utilizzato anche per ottenere la stima di parametri costanti non noti. Per esempio si supponga di voler stimare la resistenza di un resistore, che indichiamo con x_0. In genere si conoscono il valore nominale $\bar{x}_0$ ed eventualmente l'intervallo di confidenza $\bar{x}_0 \pm p_0$. Si puo' quindi supporre che $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, p_0)$. Abbiamo la possibilita' di fare delle misure direttamente sul resistore. Queste misure sono affette da rumore con media nulla e varianza r. Quindi il modello di misura puo' essere scritto come:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k, \quad x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, p_0) \\ y_k &= x_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, r) \end{aligned}$$

E' chiaro che non essendoci dinamica $x_k = x_0 \forall k$.

1. Si calcoli il filtro di Kalman in maniera esplicita. A cosa converge p_k? e il guadagno di Kalman k_k?

2. Se $p_0 = \infty$ cosa e' p_1? e p_k? Si noti che in questo caso $\hat{x}_{k|k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y_i$, cioe' il filtro di Kalman corrisponde al calcolo della media in maniera iterativa. Quale e' il significato di p_0 quindi? Cosa succede se per qualche motivo uso un p_0 diverso?

3. Si facciano alcune simulazioni con $x_0 = 1.9, \bar{x}_0 = 1.5, p_0 = 0.5, r = 0.4$. In particolare si faccia il grafico di $\hat{x}_{k|k}$ e vedere che converge a x_0. Qual'e' la velocita' di convergenza di $\hat{x}_{k|k}$ a x_0? Cioe' con che velocita' converge a zero $p_{k|k}$?