TEORIA DEI SISTEMI e IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI (IMC - 12 CFU)
COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
3 Settembre 2013 - A.A. 2012-2013

Esercizio 1. Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,-1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) *pt.5.0* Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità semplice e asintotica del sistema, evidenziandone i modi e il loro carattere, e la stabilità BIBO.

ii) *pt.4.0* Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'osservabilità del sistema, discutendo inoltre l'esistenza di uno stimatore asintotico.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

i) *pt.4.0* Si determini, se esiste, una matrice di cambio di base T in modo tale che il sistema $(T^{-1}FT, T^{-1}g)$ sia in forma canonica di controllo e si scriva esplicitamente tale forma canonica di controllo.

ii) *pt.4.0* Si calcoli, se esiste, la sequenze di ingresso ottima che fa evolvere lo stato del sistema da $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ a $x_f = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ in tre passi.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

i) *pt.4.5* Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi elementari solo e^{-t} e e^{-2t};

ii) *pt.4.5* si progetti, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che la risposta impulsiva del risultante sistema retroazionato presenti il solo modo e^{-t};

iii) *pt.4.0* si progetti, se possibile, uno stimatore il cui errore di stima converga, per $t \to +\infty$, come e^{-t}.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) La matrice di stato presenta come autovalori presunti $\sigma_F = \{0, 1-a^2, a-1\}$, e al variare di $a \in \mathbb{R}$ si presentano quattro casi, per $a = 1$, $a = -1$, $a = -2$, $a \neq 1, -1, -2$.

- per $a = 1$, si ha $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica $n_1 = 3$; la molteplicità geometrica risulta essere $s_1 = 2$ (2 miniblocchi nella forma di Jordan), per cui si deriva la seguente forma di Jordan:
$$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
I modi risultano $m_1(t) = 1$ (limitato) e $m_2(t) = t$ (divergente). Il sistema è instabile.

- per $a = -1$, si ha $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica $n_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$, con molteplicità algebrica $n_2 = 1$; la molteplicità geometrica di λ_1 risulta essere $s_1 = 1$ (1 miniblocco nella forma di Jordan), per cui si deriva la seguente forma di Jordan:
$$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
I modi risultano $m_1(t) = 1$ (limitato), $m_2(t) = t$ (divergente) e $m_3(t) = e^{-2t}$ (convergente). Il sistema è instabile.

- per $a = -2$, si ha $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica $n_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$, con molteplicità algebrica $n_2 = 2$; la molteplicità geometrica di λ_2 risulta essere $s_1 = 1$ (1 miniblocco nella forma di Jordan), per cui si deriva la seguente forma di Jordan:
$$F_J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
I modi risultano $m_1(t) = 1$ (limitato), $m_2(t) = e^{-3t}$ (convergente) e $m_3(t) = te^{-3t}$ (convergente). Il sistema è semplicemente stabile.

- per $a \neq 1, -1, -2$, si ha $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 - a^2$, e $\lambda_3 = a - 1$, tutti con molteplicità algebrica (e quindi geometrica) unitaria. La forma di Jordan sarà una forma diagonale:
$$F_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$
I modi risultano $m_1(t) = 1$ (limitato), $m_2(t) = e^{(1-a^2)t}$ (convergente se $a < -1$ o $a > 1$) e $m_3(t) = e^{(a-1)t}$ (convergente se $a < 1$). Il sistema (che non può mai essere asintoticamente stabile) è pertanto semplicemente stabile se $a < -1$.

Per lo studio della stabilità BIBO calcoliamo dapprima la matrice di trasferimento:
$$W(s) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s-(1-a^2) & 0 \\ 0 & -1 & s-(a-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
che dopo alcuni calcoli porge
$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s-2+a^2}{s(s-(1-a^2))} & 0 \end{bmatrix}.$$
Per avere stabilità BIBO occorre innanzitutto cancellare il polo in zero, con lo zero al numeratore, da cui si ottiene $a^2 = 2$, ossia $a = \pm\sqrt{2}$. Per tali valori di a la W(s) si riduce a
$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & 0 \end{bmatrix},$$

che presenta un solo polo in -1, risultando quindi BIBO stabile. La cancellazione con l'altro polo, invece, si ottiene se $1 - \frac{a^2}{2} = 1 - a^2$, ossia se $a = 0$: per tale valore di a la W(s) si riduce a

$$W(s) = [\,\tfrac{2}{s} \quad 0\,],$$

che presentando un polo in 0, non è BIBO stabile.

ii) Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2(a^2-1) & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 1 se $a = 0$, e rango pari a 2 altrimenti. Il sistema risulta pertanto sempre non osservabile. Lo spettro della matrice F risulta $\sigma_F = \{0, 1-a^2, a-1\}$, e per l'esistenza dello stimatore asintotico bisogna ora verificare quali sono gli autovalori del sottosistema non osservabile. A tal fine si può ricorrere al test PBH:

$$PBH = \left[\begin{array}{ccc} s & -1 & 0 \\ 0 & s-(1-a^2) & 0 \\ 0 & -1 & s-(a-1) \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ora:

- per $a \neq 0$, la matrice scende di rango solo in corrispondenza a $s = a-1$, per cui è possibile progettare uno stimatore asintotico se $a - 1 < 0$, ossia $a < 1$ (con $a \neq 0$);

- per $a = 0$, lo spettro di F risulta $\sigma_F = \{0, 1, -1\}$. Si può già concludere che non è possibile progettare uno stimatore asintotico, in quanto gli autovalori non osservabili (e quindi non allocabili) sono due e sicuramente uno di questi non dà origine a un modo convergente. Peraltro, la matrice PBH diventa

$$PBH = \left[\begin{array}{ccc} s & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

  che scende di rango in corrispondenza a $s = \pm 1$.

Esercizio 2. i) Poiché la matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = [\,g \quad Fg\,] = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno, la coppia (F, g) è raggiungibile e quindi è algebricamente equivalente ad una coppia in forma canonica di controllo. Il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(z) = \det \begin{bmatrix} z+3 & -1 \\ 2 & z \end{bmatrix} = (z+2)(z+1) = z^2 + 3z + 2.$$

Di conseguenza la forma canonica di controllo della coppia (F, g) è immediatamente determinata:

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A questo punto, per determinare la matrice T di cambio di base, è utile ricordare che, se T è la matrice di cambio di base che fa passare da (F, g) a (F_c, g_c), le matrici di raggiungibilità della coppia (F, g) e della coppia (F_c, g_c), rispettivamente $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_c$, sono legate tra loro dalla relazione

$$\mathcal{R}_c = T^{-1}\mathcal{R}.$$

Da ciò segue

$$T^{-1} = \mathcal{R}_c \mathcal{R}^{-1}$$

e quindi

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}.$$

Calcoliamo allora $\mathcal{R}_c$:

$$\mathcal{R}_c = [\, g_c \quad F_c g_c \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

da cui

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

ii) Poichè il sistema è raggiungibile, il problema è sicuramente risolubile.
In tre passi, si ha:

$$x_f = F^3 x_0 + [\, g \quad Fg \quad F^2 g \,] \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathcal{R}_3 u_3,$$

che fornisce un sistema lineare sottodeterminato in due equazioni in tre incognite. Si può peraltro trovare la soluzione ottima attraverso l'introduzione di una variabile ausiliaria η_3 come segue:

$$\begin{aligned} x_f - F^3 x_0 &= \mathcal{R}_3 u_3 \\ x_f - F^3 x_0 &= \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_3^\top \eta_3 \end{aligned}$$

da cui

$$\eta_3 = \left(\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_3^\top\right)^{-1} \left(x_f - F^3 x_0\right) \Rightarrow u_3 = \mathcal{R}_3^\top \eta_3.$$

Numericamente si ha

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 & -11/3 \\ -1/3 & 4/3 & -10/3 \end{bmatrix},$$

da cui deriva:

$$\eta = \begin{bmatrix} -12 \\ 15 \end{bmatrix},$$

e

$$u(0) = -6 \quad u(1) = 0 \quad u(2) = 3.$$

Esercizio 3. i) È immediato verificare che il sistema è in forma standard di raggiungibilità e l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile è -1. Infatti, le matrici (F, g) partizionate secondo la struttura di forma standard di raggiungibilità evidenziano un sottosistema $(F_{11}, g_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ raggiungibile, in quanto $\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ha rango pari a 2, e $F_{22} = [-1]$.

Tale situazione è compatibile con quanto richiesto dal problema: infatti, per avere come modi esclusivamente e^{-t} ed e^{-2t} la matrice di stato del sistema retroazionato $F + gK$ deve avere come polinomio minimo $\psi_{F+gK}(s) = (s+1)(s+2)$, che corrisponde a due possibili scelte per Δ_{F+gK} ossia $p^A_{F+gK}(s) = (s+1)(s+2)^2$ e $p^B_{F+gK}(s) = (s+1)^2(s+2)$. Dato il vincolo imposto dal sottosistema non raggiungibile, $\Delta_{F+gK}(s) = \Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s)\Delta_{F_{22}}(s)$, i polinomi compatibili allocabili per $\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s)$ sono $p^A_1(s) = (s+2)^2$ e $p^B_1(s) = (s+1)(s+2)$.

Attraverso una generica matrice di retroazione partizionata in modo conforme alla Forma standard, $K = [K_1 \mid K_2] = [a \; b \mid c]$, si ottiene:

$$F_{11} + g_1 K_1 = \begin{bmatrix} 1+a & 1+b \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s) = s^2 - s(1+a) - 2(1+b).$$

Scegliendo la soluzione $p_1^A(s)$ si ottiene $a = -5$, $b = -3$, ossia $K = [\,-5 \quad -3 \quad c\,]$. Occorre ora valutare la molteplicità geometrica dell'autovalore di molteplicità algebrica 2 (in questo caso -2):

$$s_{-2} = \dim\ker(-2I - F - gK) = \dim\ker \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1-c \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che essa vale 1 per ogni valore di c. Tale soluzione porta a un unico blocco di dimensione 2 relativo a -2 nella forma di Jordan, che non è compatibile con la richiesta fatta sui modi del sistema.

Alternativamente, scegliendo $p_1^B(s)$ si perviene a una seconda soluzione:

$$K = [\,-4 \quad -2 \quad c\,].$$

Imponendo poi che la molteplicità geometrica dell'autovalore di molteplicità algebrica 2 (in questo caso -1) sia pari a 2, ossia che la forma di Jordan corrispondente presenti due miniblocchi di dimensione 1, si ottiene, per $c = 0$,

$$s_{-1} = \dim\ker(-I - F - gK) = \dim\ker \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1-c \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Pertanto il controllore

$$K = [\,-4 \quad -2 \quad 0\,]$$

attribuisce al risultante sistema retroazionato solo i due modi assegnati.

ii) In generale, i modi presenti nella risposta impulsiva del sistema si possono studiare facilmente calcolando la funzione di trasferimento $W(s)$ (che ne costituisce la trasformata) e studiandone i poli. Calcoliamo dapprima la funzione di trasferimento del sistema (F, g, H) che, vista la non raggiungibilità del sistema, coincide con la funzione di trasferimento del sottosistema raggiungibile $(F_{11}, H_1, g_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\,1 \quad 0\,] \right)$:

$$W(s) = H_1(sI_2 - F_{11})^{-1} g_1 = \frac{s}{(s+1)(s-2)}.$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace a $W(s)$ si vede subito che la corrispondente risposta impulsiva presenta i modi e^{-t} ed e^{2t}.

La retroazione permette di modificare liberamente il denominatore (lasciando inalterato il numeratore) in modo tale da avere, alla fine, un unico polo in -1, condizione necessaria e sufficiente per risolvere il problema posto. Si tratta quindi di introdurre, attraverso la matrice di retroazione $K = [K_1 \mid K_2] = [a\ b \mid c]$, partizionata in modo conforme alla forma standard di raggiungibilità, una cancellazione zero-polo che lasci al denominatore il solo fattore $s+1$. Ciò si ottiene imponendo a denominatore il seguente polinomio $p_1(s) = s(s+1)$ e ottenendo in tal modo

$$W_K(s) = H_1(sI_2 - F_{11} - g_1K_1)^{-1} g_1 = \frac{s}{(s+1)(s-2)}.$$

Operando, come al punto precedente, sulla sola parte raggiungibile del sistema si trova

$$\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s) = s^2 - (1+a)s - 2(1+b).$$

Equagliando i coefficienti di $\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s)$ a quelli di $p_1(s)$ si perviene alla soluzione:

$$K = [\,-2 \quad -1 \quad c\,],$$

con c arbitrario.

iii) La specifica richiesta equivale a chiedere che l'evoluzione (libera) dell'errore di stima $e(t)$, per valori molto grandi di t (e quindi asintoticamente), possa essere descritta ricorrendo al solo modo e^{-t}. In altre parole, è richiesto che i modi di $(F + LH)$ soddisfino i seguenti requisiti:

1. tra di essi ci sia il modo e^{-t};
2. qualsiasi altro modo $m(t)$ sia asintoticamente irrilevante rispetto a e^{-t}, nel senso che

$$\frac{m(t)}{e^{-t}} \to 0 \quad \text{per } t \to +\infty,$$

ovvero e^{-t} sia il modo dominante.

Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

il cui rango è pari a 3. La coppia (F, H) è pertanto completamente osservabile ed è quindi possibile attribuire alla matrice $F + LH$ una arbitraria terna di autovalori.

Date le condizioni richieste dal problema, scegliamo ad esempio uno spettro complessivo pari a

$$\sigma(F + LH) = \{-1, -2, -2\}.$$

In questo modo, infatti si hanno due modi (siano essi entrambi e^{-2t} oppure l'uno e^{-2t} e l'altro te^{-2t}) che convergono a zero prima di e^{-t}, in aggiunta al modo dominante e^{-t}.

Scegliamo una matrice L parametrica, $L = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e calcoliamo la generica matrice $F + LH$,

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 2+b & 0 & -1 \\ c & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è dato dalla seguente espressione:

$$\Delta_{F+LH}(s) = s^3 - a\ s^2 - (a + b + c + 3)\ s - (b - c + 2).$$

Eguagliando i coefficienti di $\Delta_{F+LH}(s)$ a quelli del polinomio desiderato $p(s) = (s + 1)(s + 2)^2$, si ottiene lo stimatore richiesto

$$L = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$