# TEORIA DEI SISTEMI e IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI (IMC - 12 CFU)
# COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
# 2 Luglio 2013 - A.A. 2012-2013

**Esercizio 1.** Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1+a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]\, x(t), \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

dove $a$ è un parametro reale.

i) *pt.4.5* Al variare di $a$ in $\mathbb{R}$, si calcolino esplicitamente i sottospazi di controllabilità in $k$ passi per ogni $k \in \mathbb{N}$.

ii) *pt.4.0* Si determini, al variare di $a$ e se possibile, la famiglia dei controllori dead-beat che rendono la matrice $F + gK$ del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo.

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) \;=\; Fx(t) + [g_1 g_2]\, u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) *pt.4.0* Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione stabilizzante dal solo primo ingresso $g_1$ che attribuisca al risultante sistema retroazionato modi esponenziali puri.

ii) *pt.4.5* Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo secondo ingresso $g_2$ che attribuisca al risultante sistema retroazionato 2 modi distinti relativi a un unico autovalore.

iii) *pt.5.0* Si progetti un controllo in retroazione $K$ che faccia uso di entrambi gli ingressi e attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $p(s) = (s+1)^3$. Si utilizzi opportunamente il Lemma di Heymann in modo da rendere il sistema raggiungibile dal secondo ingresso.

**Esercizio 3.** Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a^2 & a^2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad -3 \quad 1\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

con $a$ parametro reale.

i) *pt.4.0* Si studi, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$, l'osservabilità del sistema, e per quei valori di $a$ per cui il sistema risulta non osservabile si determini esplicitamente il sottospazio non osservabile $X^{no}(a)$.

ii) *pt.4.0* Per $a = 0$, si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato in modo tale che il risultante sistema retroazionato risponda al segnale di ingresso $u(0) = 1, u(t) = 0, t > 0$, con uscita in evoluzione forzata $y(t) = 2^{t-1}, t \geq 1$.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

i) Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im}G = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \\
X_3^R &= X_2^R.
\end{aligned}$$

Si trova, allora,

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im}G\} = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}0\\x_2+2x_3\\2x_2+(1+a)x_3\end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : 2x_2+(1+a)x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R}, x_2 = -\frac{1+a}{2}x_3 \right\} = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-\frac{1+a}{2}\\1\end{bmatrix} \rangle \\
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}0\\5x_2+(4+2a)x_3\\(4+2a)x_2+(5+2a+a^2)x_3\end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \right\} = \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Pertanto, il sistema è controllabile a zero in due passi per ogni valore di $a$.

ii) La controllabilità del sistema per ogni valore di $a$ implica l'esistenza di un controllore deadbeat. Posto $K = [\,k_0 \quad k_1 \quad k_2\,]$, affinchè $F + gK$ sia nilpotente è sufficiente imporre

$$\det \begin{bmatrix} z-1-k_1 & -2-k_2 \\ -2 & z-1-a \end{bmatrix} = z^2 - (2+k_1+a)z + (-3+a+(1+a)k_1 - 2k_2) \equiv z^2.$$

Si trova allora $k_1 = -2-a$ e $k_2 = -\frac{5+2a+a^2}{2}$. Resta allora da scegliere $k_0$ in modo tale da rendere minimo possibile l'indice di nilpotenza di $F + gK$. Sostituendo i valori di $k_1$ e $k_2$ si trova:

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_0 & -(1+a) & -\frac{(1+a)^2}{2} \\ 0 & 2 & 1+a \end{bmatrix}.$$

Poichè tale matrice non è mai nulla, l'indice non potrà mai essere pari a 1. Proviamo a vedere se è possibile avere indice di nilpotenza pari a due. Elevando $F + gK$ al quadrato si trova:

$$(F+gK)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_0(1+a) & 0 & 0 \\ 2k_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede allora che è possibile avere indice di nilpotenza 2 se e solo se $k_0 = 0$.

**Esercizio 2.** i) Il calcolo della matrice di raggiungibilità per la coppia $(F, g_1)$ porge

$$\mathcal{R}_1 = [\,g_1 \quad Fg_1 \quad F^2g_1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 3. Il sistema è quindi raggiungibile dal primo ingresso ed è possibile allocare arbitrariamente tramite una matrice di retroazione $k_1$ il polinomio caratteristico della matrice

$F + g_1 k_1$. In particolare, è possibile selezionare una matrice $k_1$ che attribuisca a $F + g_1 k_1$ un polinomio caratteristico $\Delta_{F+g_1k_1}(s)$ con soluzioni reali negative e distinte. Scegliamo come polinomio caratteristico il polinomio

$$p(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6.$$

Se attribuiamo alla matrice di retroazione $k_1$ la forma parametrica $k_1 = [\,a \quad b \quad c\,]$ si ottiene

$$\begin{aligned} F + g_1 k_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\,a \quad b \quad c\,] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ a & b & c-2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$\Delta_{F+g_1k_1} = s^3 + (2-c)s^2 + (-2-b)s + (-a+2c-4).$$

Imponendo $\Delta_{F+g_1k_1} = p(s)$ si ottiene

$$\begin{cases} -c+2 = 6 \\ -2-b = 11 \\ -a+2c-4 = 6 \end{cases},$$

che porge

$$k_1 = [\,-18 \quad -13 \quad -4\,].$$

ii) Il calcolo della matrice di raggiungibilità per la coppia $(F, g_2)$ porge

$$\mathcal{R}_2 = [\,g_2 \quad Fg_2 \quad F^2 g_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 2. Pertanto la coppia $(F, g_2)$ non è raggiungibile ed il sottospazio non raggiungibile ha dimensione unitaria.

Dal test PBH, oppure osservando che il sistema è in forma standard di raggiungibilità (la coppia $(\bar{F}_{11}, \bar{g}_1) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ è raggiungibile, essendo in forma canonica di controllo) si deduce che $\lambda = -2$ è l'autovalore del sottosistema non raggiungibile ($\bar{F}_{22} = [-2]$). Pertanto questo sarà anche l'unico autovalore da attribuire al sistema retroazionato.

Si tratta quindi di allocare il polinomio caratteristico del sottosistema raggiungibile in $(s+2)^2$, il che si ottiene ragionando direttamente sulla forma canonica di controllo evidenziata con una matrice di retroazione $k_2 = [\,a \quad b \quad c\,]$ che risulta pari a

$$k_2 = [\,-6 \quad -4 \quad c\,].$$

Il vincolo di avere due soli modi si impone attraverso la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $-2$:

$$\dim U_{-2}^{(k_2)} = 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & c+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = [\,-6 \quad -4 \quad -1\,].$$

iii) La matrice di raggiungibilità del sistema risulta

$$\mathcal{R} = [\,g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad F^2 g_1 \quad F^2 g_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

ovviamente di rango 3. Utilizziamo il lemma di Heymann per costruire una matrice $M_2$ di pre-retroazione che renda il sistema retroazionato $(F+GM_2, G)$ raggiungibile dal solo secondo ingresso (i.e. la coppia $(F+GM_2, g_2)$ deve essere raggiungibile). Si costruiscono dapprima la matrice $Q_2$ selezionando in modo opportuno le colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{R}$, e la matrice $S_2$ ad essa correlata

$$Q_2 = [\, g_2 \quad Fg_2 \quad g_1 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q_2^{-1} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta

$$M_2 = S_2 Q_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e operando la pre-retroazione si ottiene

$$F + GM_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il sistema pre-retroazionato risulta raggiungibile dal secondo ingresso e attraverso una matrice parametrica $k_2 = [\, a \quad b \quad c \,]$, si ottiene

$$F + GM_2 + g_2 k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2+a & b & 1+c \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico risulta

$$\Delta_{F+GM_2+g_2k_2} = s^3 + (2-b)s^2 + (-2-a-2b)s + (-2a-c-5)$$

Eguagliando il polinomio caratteristico richiesto $p(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ a $\Delta_{F+GM_2+g_2k_2}$, si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} 2-b = 3 \\ -2-a-2b = 3 \\ -2a-c-5 = 1 \end{cases},$$

che fornisce

$$k_2 = [\, -3 \quad -1 \quad 0 \,].$$

La matrice di retroazione complessiva risulta:

$$K = M_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 3.** i) La matrice di osservabilità del sistema è data da

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -a^2 & a^2 & -2 \\ 2a^2 & -3a^2 & a^2-2 \end{bmatrix},$$

che ha determinante pari a $\det(\mathcal{O}) = -2a^2(a^2-9)$, nullo per $a=0$ oppure $a=\pm 3$. Il sistema è pertanto osservabile per $a \notin \{0, 3, -3\}$.

Per $a=0$ si ha:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X^{no} = \ker \mathcal{O} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Per $a = \pm 3$ si ha:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -9 & 9 & -2 \\ 18 & -27 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X^{no} = \ker \mathcal{O} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \rangle$$

ii) Possiamo risolvere il problema scrivendo la serie formale associata allingresso assegnato (limpulso discreto), pari a $U(z) = 1$, mentre il segnale di uscita in evoluzione forzata è associato a:

$$Y(z) = \sum_{t \geq 1} 2^{t-1} z^{-t} = \frac{1}{2} \left( \sum_{t \geq 0} 2^t z^{-t} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - 2z^{-1}} - 1 \right) = \frac{1}{z - 2}.$$

Poichè tali serie formali sono legate tra loro dalla funzione di trasferimento che descrive il risultante sistema retroazionato $w_K(z)$, ovvero $Y(z) = w_K(z) U(z)$, ne consegue che il nostro obiettivo è quello di progettare un controllo in retroazione $K$, in modo tale che $w_K(z) = \frac{1}{(z-2)}$.

La funzione di trasferimento del sistema di partenza è

$$w(z) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z^2 - 3z}{z^3 - z^2},$$

e la retroazione dallo stato modifica (in virtù della raggiungibilità del sistema) in modo arbitrario il denominatore del sistema, lasciando invariato il numeratore. Si tratta di scegliere $K = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ in modo tale che il polinomio caratteristico di $F + gK$ (ovvero il nuovo denominatore della f.d.t.), una volta semplificato con il numeratore $z^2 - 3z$, coincida con il solo fattore $z - 2$.

Imponendo allora

$$\Delta_{F+gK} = z^3 - (k_2 + 1)z^2 - k_1 z - k_0 = (z^2 - 3z)(z - 2),$$

si trova

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$