TEORIA DEI SISTEMI e IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI (IMC - 12 CFU)
COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
17 Giugno 2013 - A.A. 2012-2013

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 1 \quad 1\,]\, x(t), \qquad\qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) *pt.4.0* Si calcoli l'evoluzione libera di **uscita** in corrispondenza dello stato iniziale generico $x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.

ii) *pt.4.5* Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo primo ingresso in modo tale che il sistema retroazionato $(F + g_1 k_1, g_1, H)$ sia BIBO stabile ma non asintoticamente stabile.

iii) *pt.3.5* Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo secondo ingresso in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia polinomio caratteristico $(s-1)^3$.

Esercizio 2. Dato il sistema lineare discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]\, x(t), \end{aligned}$$

i) *pt.4.0* Si calcoli la risposta impulsiva del sistema.

ii) *pt.5.0* Si dica se esiste un regolatore dead-beat per il sistema e, in caso affermativo, se ne costruisca uno che attribuisca sia alla matrice $F + gK$ che alla matrice $F + LH$ indici di nilpotenza minimi.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla coppia di matrici F e G:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a^2+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) *pt.4.5* Si discuta al variare di $a \in \mathbb{R}$ la raggiungibilità del sistema, senza calcolarne esplicitamente la matrice di raggiungibilità.

ii) *pt.4.5* Per i valori di a per cui il sistema non è raggiungibile, si costruisca la forma standard di raggiungibilità del sistema.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
i) L'espressione dell'evoluzione libera di uscita risulta essere:

$$y_l(t) = He^{Ft}x_0,$$

e richiede pertanto il calcolo dell'esponenziale della matrice F, ossia:

$$e^{Ft} = I + (Ft) + \frac{(Ft)^2}{2!} + \frac{(Ft)^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(Ft)^i}{i!}.$$

Peraltro, per $i \geq 2$ le potenze i-esime della matrice F risultano tutte pari a:

$$F^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui si ricava la seguente espressione per l'esponenziale:

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 & 2t & 2e^t - 2t - 2 \\ 0 & 1 & e^t - 1 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Si ricava pertanto l'evoluzione di uscita:

$$y_l(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2t & 2e^t - 2t - 2 \\ 0 & 1 & e^t - 1 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = (2\gamma)e^t + (\beta - \gamma).$$

ii) La funzione di trasferimento dal primo ingresso del sistema è

$$w_1(s) = \frac{s(s+1)}{s^2(s-1)}.$$

Poiché il sistema è raggiungibile dal primo ingresso è noto che, mediante retroazione dal primo ingresso attraverso una generica matrice $k_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$, possiamo attribuire al sistema retroazionato la funzione di trasferimento

$$w_{1K}(s) = \frac{s(s+1)}{d_K(s)},$$

con $d_K(s) = \det(sI_3 - F - g_1K_1)$ arbitrario polinomio monico di grado 3. Per rendere il sistema BIBO stabile ma non asintoticamente stabile occorre e basta attribuire a $d_K(s) = \det(sI_2 - F - g_1K_1)$ l'unico zero non "stabile" che compare al numeratore della funzione di trasferimento e scegliere i rimanenti due zeri a parte reale negativa. Scegliendo, ad esempio, $\Delta_{F+g_1k_1}(s) = s(s^2 + s + 1)$ e tenendo conto del fatto che la matrice $F + g_1k_1$ del sistema retroazionato è, in generale,

$$F + g_1k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & 1+c \end{bmatrix},$$

ne consegue che deve essere $a = 0$, $b = -1$ e $c = -2$. Quindi $k_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ è una soluzione del problema. Notiamo che tale k_1 non é affatto l'unica soluzione possibile.

iii) La coppia (F, g_2) è, evidentemente, in forma standard di raggiungibilità, da cui si deduce che la matrice del sottosistema non raggiungibile è $F_{22} = [1]$. Il polinomio caratteristico richiesto è pertanto compatibile con gli autovalori della matrice F_{22}. Poniamo $k_2 = [\,a \quad b \quad c\,]$. La matrice $F + g_2 k_2$ del sistema retroazionato diventa allora

$$F + g_2 k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ a & b & 1+c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice è $\Delta_{F+g_2k_2}(s) = (s-1)(s^2 - bs - 2a)$, e coincide con $(s-1)^3$ se e solo se $a = -1/2$, $b = 2$ e $c \in \mathbb{R}$ è libero.

Esercizio 2.
i) La risposta impulsiva del sistema si ottiene antitrasformando la funzione di trasferimento, che risulta essere pari a:

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G = [\,0 \quad 0 \quad 1\,] \begin{bmatrix} z & 0 & -1 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z-1},$$

a seguito di una doppia cancellazione zero-polo (in zero).

L'antitrasformata di $W(z)$ fornisce la risposta impulsiva del sistema:

$$w(t) = \delta_{-1}(t-1).$$

ii) Per il principio di separazione del regolatore, è sufficiente valutare l'esistenza di uno stimatore dead-beat e di un controllore dead-beat e, ai fini della minimizzazione dell'indice di nilpotenza, minimizzare separatamente gli indici di nilpotenza di $F + LH$ e $F + gK$.

La coppia (F, H) non è osservabile, giacchè

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice del sottosistema non osservabile ha dimensione 2. Per sapere se esiste uno stimatore dead-beat è sufficiente valutare la matrice del criterio PBH di osservabilità. La matrice F ha un autovalore di molteplicità 2 in 0 e un autovalore di molteplicità 1 in 1. Se dimostriamo che

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} I_3 - F \\ H \end{bmatrix} = 3$$

siamo a posto. Si trova

$$\begin{bmatrix} I_3 - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che chiaramente ha rango 3. Pertanto lo stimatore dead-beat esiste. Ponendo

$$L^T = [a\ b\ c]$$

e imponendo

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$L^T = [-1\ 0\ -1]$$

. Chiaramente in tal modo si ottiene una matrice con indice di nilpotenza 2 mentre è evidente che l'indice di nilpotenza 1 non è mai ottenibile; pertanto si tratta della soluzione ottima. Per quanto concerne il controllore dead-beat, è immediato rendersi conto del fatto che la coppia (F, g) è raggiungibile e pertanto esiste il controllore dead-beat. Ponendo

$$K = [a \ b \ c]$$

e imponendo che

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & 1+c \end{bmatrix}$$

abbia polinomio caratteristico z^3 si ottiene:

$$K = [0 \ 0 \ -1].$$

Questa è l'unica soluzione e pertanto è necessariamente la minima ($F + gK$ ha indice di nilpotenza 3).

Esercizio 3.

i) Osserviamo in primo luogo che la matrice F, per ogni scelta di a, è in forma di Jordan. Possiamo, pertanto applicare il criterio di raggiungibilità per sistemi la cui matrice di sistema sia in forma canonica di Jordan. Distinguiamo i seguenti casi: (1) $a = 0$, (2) $a = 1$, (3) $a \neq 0, 1$.

Caso (1): osservando le righe della matrice G realizziamo subito che, per $a = 0$, la matrice PBH di raggiungibilità perde rango per $z = 0$, dal momento che in F ci sono due miniblocchi di dimensione 1 relativi a 0 e le corrispondenti righe di G sono linearmente dipendenti. Pertanto la matrice PBH di raggiungibilità perde rango per $z = 0$.

Caso (2): per $a = 1$ abbiamo due miniblocchi di Jordan di dimensione 1 relativi al medesimo autovalore $\lambda = 1$. Osservando le corrispondenti righe della matrice G realizziamo subito che esse sono linearmente indipendenti e pertanto la matrice PBH di raggiungibilità non perde rango per $z = 1$.

Caso (3): per $a \neq 0, 1$ abbiamo tre miniblocchi di Jordan di dimensione 1 relativi a tre autovalori distinti. Le corrispondenti righe della matrice G sono tutte non nulle e partanto linearmente indipendenti. Ma allora la matrice PBH di raggiungibilità non perde rango e il sistema è raggiungibile.

Riassumendo, quindi, il sistema non è raggiungibile solo per $a = 0$. In tale situazione 0 è l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile.

ii) Per $a = 0$ la matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R} = [\, G \quad FG \quad F^2G \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$X^R = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e una possibile matrice T di cambio di base è

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

la cui inversa è

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si trova pertanto

$$T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$