TEORIA DEI SISTEMI e IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI (IMC - 12 CFU)
COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
30 Gennaio 2013 - A.A. 2012-2013

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t)+gu(t) = \begin{bmatrix} a^2-1 & 0 & a \\ 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) *pt.5.0* Si valuti, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità semplice, asintotica del sistema, precisandone i modi, e si studi la stabilità BIBO.

ii) *pt.4.0* Per $a = 0$, si calcoli l'evoluzione libera di stato in corrispondenza allo stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^\top$.

iii) *pt.3.5* Per $a = 1$, si determini, se possibile, il segnale di ingresso che produce la seguente risposta di evoluzione forzata:

$$y_f(t) = \left(1 - t - e^{-t}\right) \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t)+gu(t) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

i) *pt.5.0* Progettare, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti come polinomio minimo $\psi_{F+gK}(z) = (z+\lambda)^N$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ e con $N \in \mathbb{N}$ minimo.

ii) *pt.4.5* Progettare, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia un filtro FIR.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t)+gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

i) *pt.4.5* Si progetti, se possibile, uno stimatore deadbeat dello stato, e si valuti il numero di passi in cui l'errore di stima va a zero.

ii) *pt.3.5* Si progetti, se possibile, una sequenza di ingresso che porti lo stato del sistema da $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ a $x_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}^\top$ nel minimo numero di passi.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) La matrice F è triangolare a blocchi superiore e il blocco diagonale F_{11} (di dimensione 2×2) è a sua volta una matrice triangolare inferiore. Pertanto, lo spettro di F risulta

$$\sigma_F = \left\{a^2 - 1, a - 1, -1\right\},$$

e si possono distinguere 3 casi al variare di a.

- $a = 0$: si ottiene $\sigma_F = \{-1, -1, -1\}$. La molteplicità geometrica relativa all'autovalore -1 risulta pari a 2, e si hanno pertanto due miniblocchi nella forma di Jordan di dimensione 2 e 1. I modi elementari del sistema sono $m(t) = \{e^{-t}, te^{-t}\}$.
- $a = 1$: si ottiene $\sigma_F = \{0, 0, -1\}$. La molteplicità geometrica relativa all'autovalore 0 risulta pari a 1, e si ha pertanto un miniblocco di dimensione 2 nella forma di Jordan. I modi elementari del sistema sono $m(t) = \{1, t, e^{-t}\}$.
- $a \neq 0$, $a \neq 1$: si ottiene $\sigma_F = \left\{a^2 - 1, a - 1, -1\right\}$, con autovalori distinti. I modi del sistema sono $m(t) = \left\{e^{(a^2-1)t}, e^{(a-1)t}, e^{-t}\right\}$.

Complessivamente si ha:

- stabilità asintotica per $a \in (-1, 1)$;
- stabilità semplice per $a = -1$;
- instabilità, altrimenti.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - (a^2 - 1) & 0 & -a \\ -2 & s - (a - 1) & 0 \\ 0 & 0 & s + 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{s - (a - 1)}{(s - (a^2 - 1))(s + 1)}.$$

È importante evidenziare come si abbia sempre la cancellazione del polo in $(a - 1)$. In assenza di ulteriori cancellazioni, il sistema risulta BIBO stabile per $-1 < a < 1$; per $a = 1$, però, si ha la cancellazione anche del polo in $(a^2 - 1)$, e il sistema risulta ancora BIBO stabile. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $-1 < a \leq 1$.

ii) Per $a = 0$:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui si deduce

$$F^i = \begin{bmatrix} (-1)^i & 0 & 0 \\ 2i(-1)^{i+1} & (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^i \end{bmatrix}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Il calcolo dell'evoluzione libera di stato richiede di conoscere l'esponenziale di F, ossia:

$$e^{Ft} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Ft)^i}{i!} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} & 0 & 0 \\ 2t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 2te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$x_l(t) = e^{Ft}x_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 2te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ (4t-1)e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

iii) Per $a = 1$, il calcolo della funzione di trasferimento porge $W(s) = \frac{1}{(s+1)}$; la relazione nel dominio delle trasformate fra risposta forzata di uscita e segnale di ingresso è:

$$Y_f(s) = W(s)U(s),$$

e la trasformata del segnale di uscita risulta pari a

$$Y_f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{s^2(s+1)}.$$

Segue:

$$U(s) = -\frac{1}{s^2} \Rightarrow u(t) = -t\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2.

i) La coppia (F, G) è una coppia in forma standard di raggiungibilità, per cui il sistema presenta $1/2$ come autovalore del sottosistema non raggiungibile. L'unico polinomio caratteristico compatibile con la specifica richiesta di polinomio minimo è: $p(z) = (z - 1/2)^3$.

Data una generica matrice di retroazione $K = [\,a \quad b \quad c\,]$, si ottiene come matrice $F + gK$:

$$F + gK = \begin{bmatrix} -2+a & -3+b & 1+c \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

da cui $\Delta_{F+gK}(z) = (z - 1/2)\left(z^2 + z(-1-a) + (3a - 2b)\right)$. Uguagliando i coefficienti del polinomio caratteristico a $p(z)$ si ottiene $K = [\,0 \quad -1/8 \quad c\,]$, con un grado di libertà.

La dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore unico $1/2$ è pari alla sua molteplicità geometrica, che risulta:

$$s_{1/2} = \dim\ker(1/2 * I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 5/2 & 25/8 & -1-c \\ -2 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pari a 2 se $c = -1$. Pertanto il valore minimo di N (grado del polinomio minimo) è in tal caso pari a 2 ($\psi_{F+gK}(z) = (z - 1/2)^2$) e il controllore richiesto è

$$K = [\,0 \quad -1/8 \quad -1\,].$$

ii) La funzione di trasferimento di un sistema non raggiungibile coincide con la funzione di trasferimento del sottosistema raggiungibile, e inoltre per essere un filtro FIR la funzione di trasferimento deve avere tutti i poli nell'origine.

Definendo una matrice di retroazione generica

$$K = [\,K_1 \quad | \quad K_2\,] = [\,a \quad b \quad | \quad c\,]$$

nel caso specifico si tratta di allocare come polinomio caratteristico del sottosistema raggiungibile il polinomio $p(z) = z^2$, e risulta dai calcoli del punto precedente: $\Delta_{F_{11}+g_1K_{11}}(z) = z^2 + z(-1-a) + (3a-2b)$. Risulta:

$$K = [\,-1 \quad -3/2 \quad c\,],$$

con c parametro libero.

Come verifica, la funzione di trasferimento risulta:

$$W(z) = [\,1 \quad 1\,] \begin{bmatrix} z+3 & 9/2 \\ -2 & z-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z-1}{z^2}.$$

Nota: si può in alternativa osservare che il sistema di partenza è già FIR, per cui sarebbe sufficiente una retroazione nulla.

Esercizio 3.

i) La coppia (F, H) è non osservabile in quanto la matrice di osservabilità :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango pari a 2.

Lo spettro di F risulta $\sigma_F = \left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}$ e l'analisi del test PBH di osservabilità evidenzia come 0 sia proprio l'autovalore non osservabile. Pertanto, questo garantisce l'esistenza di un osservatore deadbeat.

La generica matrice $L = [\,a \quad b \quad c\,]^\top$, porge

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2+a & 0 \\ 0 & -1+b & 1 \\ 0 & 1+c & 1 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\Delta_{F+LH}(z) = z\left(z^2 + z(-b) + (b - c - 2)\right).$$

Uguagliando $\Delta_{F+LH}(z)$ a z^3 (condizione per avere il deadbeat) si ottiene $L = [\,a \quad 0 \quad -2\,]^\top$, e

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2+a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per valutare il numero di passi in cui si annulla l'errore di stima, occorre calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore nullo, che risulta:

$$s_0 = \dim\ker(0 * I - F) = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -2-a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

che vale 2 se $a = -2$ e vale 1 se $a \neq -2$. Nel primo caso si ha uno stimatore deadbeat in 2 passi, nel secondo caso uno stimatore deadbeat in 3 passi.

ii) La coppia (F, G) è raggiungibile, in quanto la matrice di raggiungibilità ha rango pieno:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto esiste sicuramente un ingresso che permette di andare da x_0 a x_f, secondo la $x_f = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u_t$.

Il calcolo delle potenze di F fornisce:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad F^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si ha:

- 1 passo: $x_f = F x_0 + \mathcal{R}_0 u_0$.

$$x_f - F x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} \notin \operatorname{Im}\mathcal{R}_0 \Rightarrow \nexists u_0$$

- 2 passi: $x_f = F^2 x_0 + \mathcal{R}_1 u_1$.

$$x_f - F^2 x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix} \notin \mathrm{Im}\mathcal{R}_1 \Rightarrow \nexists u_1$$

- 3 passi: $x_f = F^3 x_0 + \mathcal{R}_2 u_2$.

$$x_f - F^3 x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}\mathcal{R}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

Dall'ultimo sistema di equazioni si ottiene la sequenza di ingresso: $u(0) = 1$, $u(1) = 2$, $u(2) = 3$.