TEORIA DEI SISTEMI e IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI (IMC - 12 CFU)
COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
19 Febbraio 2013 - A.A. 2012-2013

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo discreto non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1(t)\left(1 - x_2^2(t)\right) + \frac{1}{2}x_2^3(t), \\
x_2(t+1) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = 2x_1(t)\left(1 + x_2^2(t)\right), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

i) *pt.5.0* Si determinino i punti di equilibrio del sistema.

ii) *pt.4.0* Si determini il modello linearizzato del sistema in corrispondenza a ciascuno dei punti di equilibrio, e se ne studi la stabilità semplice/asintotica.

[Suggerimento: non preoccupatevi se i numeri che risultano non sono bellissimi...]

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalla seguente equazione di stato:

$$
\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad t \in \mathbb{R}_+.
$$

i) *pt.4.0* Si determini, se possibile, una matrice di retroazione K in modo che il sistema retroazionato presenti come modi 1, e^{-t}, e^{-2t}.

ii) *pt.4.5* Nel caso che il sistema sia raggiungibile, si determini la forma canonica di controllo e la relativa matrice T di cambio di base; nel caso che il sistema sia non raggiungibile, si determini una forma standard di raggiungibilità per il sistema, e la corrispondente matrice T di cambio di base.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} a \\ a-1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}
$$

con a parametro reale.

i) *pt.4.0* Si studi raggiungibilità e controllabilità del sistema, al variare del parametro a.

ii) *pt.4.5* Per $a = 0$: si progetti, se possibile, un controllore deadbeat, determinando quello con indice di nilpotenza minimo.

iii) *pt.4.0* Per $a = 0$: si progetti, se possibile, un regolatore deadbeat.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
i) Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ sono

$$\begin{cases} x_{1e} &= \frac{1}{2}x_{1e}\left(1 - x_{2e}^2\right) + \frac{1}{2}x_{2e}^3, \\ x_{2e} &= 2x_{1e}\left(1 + x_{2e}^2\right), \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava:

$$x_{1e} = \frac{1}{2}\frac{x_{2e}}{1 + x_{2e}^2},$$

che sostituito nella prima equazione fornisce dopo alcuni calcoli:

$$x_{2e}\left(x_{2e}^4 + \frac{1}{2}x_{2e}^2 - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Da quest'ultima si ottiene una soluzione immediata per x_{2e}, $x_{2e} = 0$, e una coppia di soluzioni relative allo zero positivo del termine di quarto grado (si ricordi che i valori di x_{2e} sono nel dominio reale), $x_{2e}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{2e} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si hanno pertanto tre punti di equilibrio:

- $\mathbf{x}_e = (0, 0)$
- $\mathbf{x}_e = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $\mathbf{x}_e = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ii) Le equazioni del sistema non lineare sono del tipo

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2(t+1) &= f_2(x_1(t), x_2(t)). \end{cases}$$

Il sistema linearizzato in un intorno di ciascuno dei precedenti punti assume la forma

$$\delta\dot{x}(t) = F\delta x(t)$$

dove

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}_e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(1 - x_{2e}^2\right) & -x_{1e}x_{2e} + \frac{3}{2}x_{2e}^2 \\ 2\left(1 + x_{2e}^2\right) & 4x_{1e}x_{2e} \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}_e}.$$

Pertanto:

- per $\mathbf{x}_e = (0, 0)$, $F = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, che ha autovalori di modulo inferiore all'unità e risulta dunque asintoticamente stabile;
- per $\mathbf{x}_e = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $F = \begin{bmatrix} 1/4 & 7/12 \\ 3 & 2/3 \end{bmatrix}$; il polinomio caratteristico risulta $\lambda^2 - \frac{11}{12}\lambda - \frac{19}{12}$, che presenta una radice reale negativa, di modulo inferiore all'unità, e una radice positiva, di modulo superiore all'unità; il sistema linearizzato risulta dunque instabile;
- per $\mathbf{x}_e = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, si ha nuovamente la matrice F del caso precedente.

Esercizio 2.

i) La coppia (F, g) è non raggiungibile, visto che la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango pari a 2. Lo spettro di F è $\sigma_F = \{0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ e dal test PBH si deduce che l'autovalore non raggiungibile è $\lambda = 0$. Tale condizione è compatibile con la richiesta del problema di allocare il polinomio caratteristico $p(s) = s(s+1)(s+2)$.

Considerando una generica matrice di retroazione $K = [\,a \quad b \quad c\,]$ si ottiene

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2+a & b-1 & 1+c \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

che presenta polinomio caratteristico pari

$$\Delta_{F+gK}(s) = s\left(s^2 - bs + b - c - 2\right).$$

Eguagliando $\Delta_{F+gK}(s)$ a $p(s)$ si ottiene:

$$K = [\,a \quad -3 \quad -7\,],$$

con a parametro reale.

ii) Il sistema risulta non raggiungibile (vedi punto i)) per cui esiste può essere messo in forma standard di raggiungibilità. Il sottospazio di raggiungibilità ha come base $< \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} >$, e per estenderla a base di $\mathbb{R}^3$ basta aggiungere il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si ottiene pertanto la matrice di cambio di base T che porta il sistema in forma standard:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(si noti che la matrice non è univoca e dipende dalla scelta della base).

Pertanto, con questa scelta, si ottiene:

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{g} = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si verifica che la coppia $\left(\bar{F}, \bar{g}\right)$ ha la struttura $\left(\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, con (F_{11}, g_1) raggiungibile.

Esercizio 3.

i) La matrice di raggiungibilità della coppia (F, g) è

$$\mathcal{R}_a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a-1 & a & -a+1 \\ 0 & a-1 & a \end{bmatrix},$$

che ha come determinante $|\mathcal{R}_a| = a(2a^2 - 2a + 1)$: questo è nullo solo per $a = 0$, visto che il polinomio di secondo grado risulta non avere zeri reali.

Pertanto la coppia (F, g) è raggiungibile (e quindi controllabile) per $a \neq 0$, mentre per $a = 0$ il sistema è non raggiungibile.

Peraltro, per tale valore si ha

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Im}\mathcal{R} =< \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} > .$$

Il calcolo di $F^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mostra che $\mathrm{Im}F^3 \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R}$, ossia la condizione di controllabilità è verificata. Il sistema è controllabile per $a = 0$.

In alternativa, si può verificare che per $a = 0$ il sistema ammette un controllore deadbeat.

ii) Per $a = 0$, la coppia (F, g) è controllabile per cui esiste controllore deadbeat. Considerando una generica matrice di retroazione $K = [\,\alpha \quad \beta \quad \gamma\,]$ si ottiene

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & -\beta & -1-\gamma \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

che presenta polinomio caratteristico pari

$$\Delta_{F+gK}(z) = z\left(z^2 + \beta z + 1 + \gamma\right).$$

Eguagliando $\Delta_{F+gK}(z)$ a $p(z) = z^3$ si ottiene:

$$K = [\,\alpha \quad 0 \quad -1\,],$$

con a parametro reale.

Il calcolo della potenza di $F + gK$ fornisce:

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (F + gK)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui per $\alpha = 1$ si ha indice di nilpotenza pari a 2:

$$K = [\,1 \quad 0 \quad -1\,].$$

iii) La richiesta di un regolatore deadbeat si traduce, per il principio di separazione, nella richiesta di un controllore deadbeat e di uno stimatore deadbeat, e dal punto precedente si ha che è possibile progettare un controllore deadbeat.

La matrice di osservabilità della coppia (F, H) vale

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

che ha rango pieno.

La generica matrice $L = [\,\delta \quad \epsilon \quad \phi\,]^\top$, porge

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta \\ 1 & 0 & -1+\epsilon \\ 0 & 1 & \phi \end{bmatrix},$$

da cui

$$\Delta_{F+LH}(z) = z^3 - \phi z^2 + (1-\epsilon)z - \delta.$$

Uguagliando $\Delta_{F+LH}(z)$ a z^3 (condizione per avere il deadbeat) si ottiene $L = [\,0 \quad 1 \quad 0\,]^\top$.