COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)
5 Settembre 2012 - A.A. 2011-2012

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) *pt.4* Si progetti, se possibile, un controllore dead-beat dal solo primo ingresso che attribuisca al risultante sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo possibile (specificandone il valore);

ii) *pt.4* si progetti, se possibile, un controllore dead-beat che faccia uso di entrambi gli ingressi e attribuisca al risultante sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo possibile (specificandone il valore);

iii) *pt.4* si valuti l'espressione dell'uscita (in evoluzione forzata) del sistema in corrispondenza alla successione di ingresso:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2^t \delta_{-1}(t) + \delta_{-1}(t-1) \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

i) *pt.4* Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato dalla sola prima uscita in modo tale che l'errore di stima $e(t)$ sia combinazione lineare (per ogni $e(0)$) dei soli modi e^{-t}, te^{-t};

ii) *pt.4* si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato che faccia uso di entrambe le uscite in modo tale che l'errore di stima $e(t)$ sia combinazione lineare (per ogni $e(0)$) dei soli modi e^{-t}, te^{-t}.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

i) *pt.3* Si determini la forma di Jordan della matrice F e i modi elementari del sistema, precisandone il carattere (convergente, limitato, divergente);

ii) *pt.4* si determinino i sottospazi di controllabilità del sistema X_k^C, $k = 1, 2, \ldots$.

Teoria. *pt.5* Dato un modello di stato lineare e tempo-invariante a tempo discreto $\Sigma = (F, G, H, D)$ si derivi l'espressione dell'evoluzione libera (sia di stato che di uscita) nel dominio del tempo e nel dominio delle trasformate. Si derivi, inoltre, l'espressione dei modi elementari del sistema.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
i) È immediato verificare che la coppia (F, g_1) non è raggiungibile, dal momento che la matrice di raggiungibilità della coppia (F, g_1) ha rango 2. Attraverso il criterio PBH è immediato verificare che l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile è proprio 0 e pertanto il sistema ammette un controllore dead-beat. Se attribuiamo alla matrice di retroazione K_1 la struttura parametrica

$$K_1 = [\, a \quad b \quad c \,],$$

la matrice $F + g_1 K_1$ diventa

$$F + g_1 K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & b & 1+c \end{bmatrix}$$

ed ha polinomio caratteristico

$$\Delta_{F+g_1K_1}(z) = z[z^2 - (c+2)z + (1+c+b)].$$

Pertanto $\Delta_{F+g_1K_1}(z) = z^3$ se e solo se $b = 1$ e $c = -2$. Di conseguenza i controllori dead-beat dal solo primo ingresso per il sistema sono tutti e soli quelli di struttura

$$K_1 = [\, a \quad 1 \quad -2 \,], \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Al fine di minimizzare l'indice di nilpotenza possiamo valutare come cambia la dimensione di

$$\ker(F + g_1 K_1) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

al variare di a in $\mathbb{R}$. Tale dimensione assume il valore massimo (pari a 2) per $a = 1$. In questa situazione la forma di Jordan di $F + g_1 K_1$ è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e pertanto l'indice di nilpotenza di $F + g_1 K_1$ è pari a 2. Per $a \neq 1$, $\ker(F + g_1 K_1)$ ha dimensione 1 e quindi indice di nilpotenza 3.

ii) Anche la coppia (F, G) non è raggiungibile, tuttavia se esisteva un controllore dead-beat da un solo ingresso a maggior ragione esisterà un controllore dead-beat da entrambi gli ingressi. Se attribuiamo alla matrice di retroazione K la struttura parametrica

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

la matrice $F + GK$ diventa

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 + a_2 & 1 + b_2 & -1 + c_2 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 1 + c_1 + c_2 \end{bmatrix},$$

ed è immediato verificare che le ultime due righe della matrice sono completamente arbitrarie. Possiamo pertanto eguagliare la matrice $F + GK$ alla matrice nulla, ottenendo in tal modo indice di nilpotenza minimo possibile e pari ad 1. Questa soluzione corrisponde ad attribuire alla matrice K l'espressione

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

iii) Il calcolo della matrice di trasferimento del sistema fornisce

$$\begin{aligned}
W(z) &= H(zI_3 - F)^{-1}G = [\,1 \quad -1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ -1 & z-1 & 1 \\ 0 & 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z(z-1)^2} [\,1 \quad -1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} (z-1)^2 & 0 & 0 \\ z-1 & z(z-1) & -z \\ 0 & 0 & z(z-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z-1)^2} & \dfrac{2-z}{(z-1)^2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Il calcolo della trasformata zeta della seconda componente dell'ingresso fornisce immediatamente

$$U_2(z) = \mathcal{Z}\left[2^t \delta_{-1}(t) + \delta_{-1}(t-1)\right] = \frac{z}{z-2} + \frac{1}{z-1}.$$

Si trova pertanto che la trasformata zeta dell'evoluzione forzata d'uscita è

$$\begin{aligned}
Y(z) &= W(z)U(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(z-1)^2} & \dfrac{2-z}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{z}{z-2} + \dfrac{1}{z-1} \end{bmatrix} \\
&= -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z-2}{(z-1)^3} = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3},
\end{aligned}$$

la cui antitrasformata è

$$y(k) = -\binom{k}{1} - \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2}.$$

Esercizio 2. i) È immediato rendersi conto del fatto che la coppia (F, h_1), dove h_1 rappresenta la prima riga della matrice H, è osservabile, pertanto esiste una matrice $L_1 = [\,a \quad b \quad c\,]^T$ tale che $F + L_1 h_1$ abbia polinomio caratteristico $(s+1)^3$. Il polinomio caratteristico di

$$F + L_1 H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & a \\ 1 & -1 & b+1 \\ 0 & 1 & c+1 \end{bmatrix},$$

è $s^3 - cs^2 - (b+c+4)s + (2+2c-a)$, ed esso coincide con $(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ se e solo se

$$L_1 = [\,-5 \quad -4 \quad -3\,]^T.$$

Tuttavia in corrispondenza a questa soluzione si trova che la dimensione del $\ker(-I_3 - (F + L_1 H_1))$ è pari a 1. Ciò significa che la forma di Jordan di $F + L_1 H_1$ è

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto lo stimatore così ottenuto ha tre modi: $e^{-t}, te^{-t}, \frac{t^2}{2!}e^{-t}$, e quindi non soddisfa le specifiche.

ii) Anche in questo caso la coppia (F, H) è osservabile e pertanto esiste una matrice

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

tale che $F + LH$ abbia polinomio caratteristico $(s+1)^3$. In questo caso, tuttavia, è immediato rendersi conto del fatto che la matrice $F + LH$ assume, al variare di L, la struttura

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2 + a_2 & a_1 \\ 1 & -1 + b_2 & b_1 + 1 \\ 0 & 1 + c_2 & c_1 + 1 \end{bmatrix},$$

ovvero la prima colonna è vincolata ad una struttura specifica, mentre le seconde due colonne sono completamente arbitrarie. È possibile attribuire parecchie strutture a $F + LH$ compatibili con la forma di Jordan

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

implicitamente richiesta per $F + LH$. Imponendo, ad esempio,

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2 + a_2 & a_1 \\ 1 & -1 + b_2 & b_1 + 1 \\ 0 & 1 + c_2 & c_1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si perviene al risultato desiderato. Questa soluzione corrisponde ad assumere

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3.

i) Il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(z) = z\left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right) = z\left(z - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ciò significa che abbiamo due autovalori distinti $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1/2$, il primo di molteplicità unitaria e il secondo di molteplicità 2. All'autovalore nullo e semplice viene associato un miniblocco di Jordan di dimensione 1 ad esso relativo e, come modo, l'impulso unitario discreto collocato in 0. Per sapere se all'autovalore λ_2 vengono associati due modi distinti o un unico modo, (e quindi un solo miniblocco di Jordan di dimensione 2 oppure due miniblocchi di Jordan di dimensione 1) dobbiamo valutare la molteplicità geometrica di λ_2. Se essa è unitaria, allora a tale autovalore associamo nella forma di Jordan un solo miniblocco di dimensione 2 e quindi due modi distinti:

$$\left\{\frac{1}{2^t}\right\}_{t\in\mathbb{Z}_+} \qquad \text{e} \qquad \left\{\binom{t}{1}\frac{1}{2^{t-1}}\right\}_{t\in\mathbb{Z}_+},$$

se invece vale due, allora a tale autovalore associamo nella forma di Jordan due miniblocchi di dimensione 1 e quindi un solo modo:

$$\left\{\frac{1}{2^t}\right\}_{t\in\mathbb{Z}_+}.$$

Dal momento che

$$\ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}I_3\right) = \ker\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -1/4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle,$$

ne consegue che siamo nel primo caso e quindi i modi del sistema sono, nel complesso,

$$\delta(t), \qquad \left\{\frac{1}{2^t}\right\}_{t\in\mathbb{Z}_+} \qquad \text{e} \qquad \left\{\binom{t}{1}\frac{1}{2^{t-1}}\right\}_{t\in\mathbb{Z}_+},$$

e sono tutti convergenti. Pertanto la forma di Jordan della matrice F è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

ii) Valutiamo preliminarmente i sottospazi di raggiungibilità:

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im} g = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\
X_3^R &= \mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg \quad F^2 g\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = X_2^R = X^R.
\end{aligned}$$

Si trova, allora

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in X_1^R \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ -\frac{1}{4}x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -\frac{1}{4}x_1 + x_2 = 0 \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^C &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in X_2^R \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in X_2^R \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x_2 - \frac{1}{4}x_1 \\ -\frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3 \\
X_3^C &= X_2^C = X^C.
\end{aligned}$$