TEORIA DEI SISTEMI e IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI (IMC - 12 CFU)
COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
20 Giugno 2012 - A.A. 2011-2012

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{2} & a+\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) *pt.4* si determini per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ l'evoluzione forzata dello stato $x_f(t)$ va a zero in un numero finito di passi in corrispondenza alla successione di ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } t = 1; \\ -\frac{1}{2}, & \text{per } t = 2; \\ 0, & \text{per } t \neq 1, 2. \end{cases}$$

[Suggerimento: si ricorra alle trasformate zeta e si ricordi l'espressione generica della trasformata zeta di una successione a supporto finito].

ii) *pt.4.5* Si valuti, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità semplice, asintotica, e BIBO del sistema.

iii) *pt.4.5* Si progetti, per ciascun valore di a in $\mathbb{R}$, $a \neq 0$, un controllo in retroazione $u(t) = K_a x(t)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti solo i modi elementari $(1-a)^t$ e $\delta(t)$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

i) *pt.4.5* Progettare, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti come polinomio minimo $\psi_{F+gK}(s) = (s+1)^2$.

ii) *pt.4.5* Progettare, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia un doppio integratore.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

i) *pt.4* Si progetti, se possibile, uno stimatore deadbeat dello stato, a partire dalla sola prima uscita e si valuti il numero di passi in cui l'errore di stima va a zero.

ii) *pt.4* Si progetti, se possibile, uno stimatore deadbeat dello stato, a partire da entrambe le uscite, in modo tale che l'errore di stima vada a zero nel numero minimo di passi.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
i) La trasformata zeta della successione di ingresso è

$$U(z) = 1z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z^2}.$$

L'espressione della trasformata zeta dello stato in evoluzione forzata in corrispondenza alla successione di ingresso precedente è

$$\begin{aligned} X_f(z) &= (zI_3 - F)^{-1} g U(z) = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ \frac{a}{2} & z - \left(a + \frac{1}{2}\right) & -1 \\ 0 & 0 & z - 1 + a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(z) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-a)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ \frac{z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{z-\frac{1}{2}}{z^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-a)z^2} \\ \frac{1}{(z-a)z} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poichè una successione $v(t), t \in \mathbb{Z}_+$, ha supporto finito se e solo se la sua trasformata zeta $V(z)$ può essere espressa nella forma $V(z) = \frac{n(z)}{z^N}$ per qualche $N \in \mathbb{N}$ e qualche polinomio $n(z) \in \mathbb{R}[z]$ di grado al più N, ne consegue che l'evoluzione forzata di stato $x_f(t)$ è a supporto finito se e solo se $a = 0$.

ii) È immediato rendersi conto del fatto che la matrice F è triangolare a blocchi e che il blocco diagonale F_{11} (di dimensione 2×2) è una matrice in forma compagna. Pertanto il polinomio caratteristico di F può essere scritto nella forma

$$\Delta_F(z) = \Delta_{F_{11}}(z)\Delta_{F_{22}}(z) = \left[z^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)z + \frac{a}{2}\right](z - 1 + a) = \left(z - \frac{1}{2}\right)(z-a)(z-1+a).$$

È chiaro, quindi, che tale polinomio risulta di Schur, ovvero ha tutte le radici di modulo minore di 1, se e solo se

$$|a| < 1 \qquad \text{e} \qquad |1-a| < 1.$$

Ciò si verifica se e solo se $0 < a < 1$. Pertanto, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 1$.

Per studiare la stabilità semplice, consideriamo lo spettro della matrice F quando $|1-a| = 1$ e quando $|a| = 1$. Nel primo caso si ha:

- $a = 0$: si ottiene $\sigma_F = \{1, 1/2, 0\}$, e si ha stabilità semplice;
- $a = 2$: si ottiene $\sigma_F = \{-1, 1/2, 2\}$, e si ha instabilità.

Nel secondo caso:

- $a = 1$: si ottiene $\sigma_F = \{1, 1/2, 0\}$, e si ha stabilità semplice;
- $a = -1$: si ottiene $\sigma_F = \{-1, 1/2, 2\}$, e si ha instabilità.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ a/2 & z - a - 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & z - 1 + a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(z-1+a)(z+1)}{(z-1+a)(z-a)(z-1/2)} \end{bmatrix}.$$

È importante evidenziare come si abbia sempre la cancellazione del polo in $(1-a)$. In assenza di ulteriori cancellazioni, il sistema risulta BIBO stabile per $-1 < a < 1$; per $a = -1$, però, si ha la cancellazione del polo in a, e il sistema risulta BIBO stabile. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $-1 \le a < 1$.

iii) Osserviamo, preliminarmente, che il sistema risulta in forma standard di raggiungibilità, perchè è del tipo

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con (F_{11}, g_1) in forma canonica di controllo, e quindi raggiungibile. Di conseguenza posso allocare tutti gli autovalori di F all'infuori di un autovalore che rimane collocato in $1 - a$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè i modi del sistema retroazionato siano unicamente i due assegnati è che il polinomio minimo del risultante sistema retroazionato sia $\psi_{F+gK_a}(z) = (z - 1 + a)z$. Questa condizione è compatibile con due distinti polinomi caratteristici $\Delta_{F+gK_a}(z) = (z - 1 + a)^2 z$ e $\Delta_{F+gK_a}(z) = (z - 1 + a)z^2$. Entrambi tali polinomi, in base alla precedente analisi, sono allocabili mediante retroazione. Una soluzione semplice che permette di ottenere $\Delta_{F+gK_a}(z) = (z-1+a)^2 z$ come polinomio caratteristico e $\psi_{F+gK_a}(z) = (z - 1 + a)z$ come polinomio minimo consiste nell'attribuire alla matrice $F + gK_a$ del sistema retroazionato una struttura diagonale a blocchi, con polinomio caratteristico del blocco $(1, 1)$ pari a $(z - 1 + a)z$ e polinomio caratteristico del blocco $(2, 2)$ pari a $z - 1 + a$. In tal modo è evidente quale sia la forma di Jordan e quindi il polinomio minimo di $F + gK_a$.

Assumendo quindi $K_a = [k_0 \ k_1 \ k_2]$ e imponendo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{2} & a+\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_0 \ k_1 \ k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{2}+k_0 & a+\frac{1}{2}+k_1 & 1+k_2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$K_a = [\,\tfrac{a}{2} \quad \tfrac{1}{2} - 2a \quad -1\,].$$

Esercizio 2.

i) La coppia (F, G) è una coppia raggiungibile, per cui il polinomio caratteristico del sistema retroazionato è allocabile arbitrariamente, e l'unico polinomio caratteristico compatibile con la specifica richiesta di polinomio minimo è: $\Delta_{F+gK}(s) = (s + 1)^3$.

Data una generica matrice di retroazione $K = [\,a \quad b \quad c\,]$, si ottiene come matrice $F + gK$:

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2+a & 1+b & c \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui $\Delta_{F+gK}(s) = s^3 + s^2(-2 - b) + s(-1 - a + b) + (2 + a + c)$.

Uguagliando i coefficienti del polinomio caratteristico si ottiene $K = [\,-9 \quad -5 \quad 8\,]$; peraltro, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore unico -1 è pari a 1, ossia vi è un unico miniblocco di Jordan associato $F + gK$ e quindi un polinomio minimo pari al polinomio caratteristico. Non è possibile pertanto soddisfare alla specifica richiesta.

ii) Il sistema in questione è un sistema SISO raggiungibile, pertanto la retroazione cambia solamente il denominatore della funzione di trasferimento $W(s)$. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(s) = H(sI - F)^{-1} g = [\,1 \quad 0 \quad 0\,] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -2 & s-1 & 0 \\ 1 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)(s-1)}.$$

Per avere un doppio integratore, la funzione di trasferimento deve essere pari a $\frac{1}{s^2}$, e quindi, considerando anche la cancellazione dello zero a numeratore, il sistema retroazionato dovrà avere un polinomio caratteristico (denominatore della f.d.t.) pari a: $\Delta_{F+gK}(s) = (s - 1)s^2$.

Dal calcolo del polinomio caratteristico del punto precedente, segue una matrice di retroazione pari a

$$K = [\,-2 \quad -1 \quad 0\,].$$

Esercizio 3.

i) La coppia (F, h_1) è osservabile in quanto la matrice di osservabilità relativa alla prima uscita ha rango pieno:

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La generica matrice $L_1 = [\,a \quad b \quad c\,]^\top$, porge

$$F + L_1 h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2+a \\ 1 & 0 & 1+b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix},$$

da cui

$$\Delta_{F+L_1h_1}(z) = z^3 - z^2 c - z(b+1) - (a+2).$$

Uguagliando $\Delta_{F+L_1h_1}(z)$ a z^3 (condizione per avere il deadbeat) si ottiene $L_1 = [\,-2 \quad -1 \quad 0\,]^\top$, e

$$F + L_1 h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (F + L_1 h_1)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (F + L_1 h_1)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha pertanto uno stimatore deadbeat in tre passi.

ii) La coppia (F, H) è osservabile, pertanto esiste sicuramente uno stimatore deadbeat in tre passi (vedi punto precedente). Vediamo se si può fare di meglio, in uno o due passi.

La generica matrice $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^\top$, porge

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & d & 2+a+d \\ 1 & e & 1+b+e \\ 0 & 1+f & c+f \end{bmatrix},$$

da cui si vede che per effetto dell'*entry* sempre non nulla in prima colonna, non è possibile realizzare uno stimatore deadbeat in un solo passo.

Peraltro è possibile ottenere un deadbeat in due passi, dando struttura diagonale a blocchi alla matrice ($f + 1 = 0$, $2 + a + d = 0$ e $1 + b + e = 0$) e al contempo imponendo tutti gli autovalori a zero ($e = d = 0$ e $c + f = 0$); si ricava:

$$L = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top.$$

La matrice che si ottiene,

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (F + LH)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

risulta effettivamente nilpotente in due passi.