TEORIA DEI SISTEMI e IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI (IMC - 12 CFU)
COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
1 Febbraio 2012 - A.A. 2011-2012

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2a & a-2 & 0 \\ 2 & 0 & 2-a^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad -2 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) pt.5 Si determinino, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e si studino stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema;

ii) pt.3 per $a = 0$: si determini, se possibile, l'ingresso $u(t)$ che produce la seguente evoluzione forzata di uscita:

$$y(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 - t\right) \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

i) pt.4 Calcolare, se possibile, una matrice H tale che il sistema risulti BIBO stabile.

ii) pt.4.5 Progettare, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti i modi e^{-t}, te^{-t} e e^{-2t}.

iii) pt.4.5 Sia $H = [\,-1 \quad -1 \quad 0\,]$. Progettare, se possibile, uno stimatore L in modo tale che l'errore di stima evolvi come combinazione lineare dei modi e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,-1 \quad 0 \quad -1\,]\, x(k), \qquad t \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

i) pt.4 Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia di tipo F.I.R. (ovvero a risposta impulsiva finita) senza essere a memoria finita.

ii) pt.5 Si progetti, se possibile, un regolatore deadbeat.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
i) Lo spettro presunto della matrice F è $\sigma_F = \{2 - a^2, a, -2\}$, e si possono avere quattro casi:

- $a = 1$: $\sigma_F = \{1, 1, -2\}$ e la matrice F assume la forma:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

  In tal caso, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore doppio $\lambda = 1$ è pari a 1 e pertanto la forma di Jordan della matrice F presenta un solo miniblocco di dimensione 2 relativamente all'autovalore in esame:

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

  Il sistema risulta instabile.

- $a = 2$: $\sigma_F = \{-2, -2, 2\}$ e la matrice F assume la forma:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

  In tal caso, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore doppio $\lambda = -2$ è pari a 1 e pertanto la forma di Jordan della matrice F presenta un solo miniblocco di dimensione 2 relativamente all'autovalore in esame:

$$F_J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

  Il sistema risulta instabile.

- $a = -2$: $\sigma_F = \{-2, -2, -2\}$ e la matrice F assume la forma:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

  In tal caso, la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore triplo $\lambda = -2$ è pari a 1 e pertanto la forma di Jordan della matrice F presenta un solo miniblocco di dimensione 3 relativamente all'autovalore in esame:

$$F_J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

  Il sistema risulta asintoticamente stabile.

- $a \neq \{1, 2, -2\}$: $\sigma_F = \{2 - a^2, a, -2\}$, distinti. In tal caso, la forma di Jordan della matrice F presenta un solo miniblocco di dimensione 1 per ogni autovalore:

$$F_J = \begin{bmatrix} 2 - a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

  Il sistema risulta asintoticamente stabile per $a < -\sqrt{2}$, semplicemente stabile se $a = -\sqrt{2}$, instabile negli altri casi.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G = [\,1 \quad -2 \quad 0\,] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -2a & s-a+2 & 0 \\ -2 & 0 & s-2+a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{(3-5a)-s}{(s-a)(s+2)}.$$

È importante evidenziare come si abbia sempre la cancellazione del polo in $(2-a^2)$. In assenza di ulteriori cancellazioni, il sistema risulta BIBO stabile per $a < 0$; per $a = 1/2$, però, si ha la cancellazione del polo in a, e il sistema risulta BIBO stabile. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in 1/2 \cup (-\infty, 0)$.

ii) Per $a = 0$ la matrice F diventa $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e la funzione di trasferimento del sistema vale

$$W(s) = \frac{3-s}{s(s+2)}.$$

La successione di uscita ha trasformata di Laplace

$$Y(s) = \frac{3}{s^3} - \frac{1}{s^2}.$$

Si trova:

$$Y(s) = W(s)U(s) \Rightarrow U(s) = \frac{s+2}{s^2},$$

a cui corrisponde la successione di ingresso

$$u(t) = (1+2t)\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2.

i) Il sistema è un sistema SISO in forma canonica di controllo, per cui la sua funzione di trasferimento si ottiene direttamente dall'ultima riga della matrice F (in forma compagna) e dalla matrice $H = [\,b_0 \quad b_1 \quad b_2\,]$:

$$w(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{s^3 - s} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{s(s-1)(s+1)}.$$

Per avere un sistema BIBO è necessario cancellare i due zeri in 0 e 1, per cui il numeratore deve essere pari a $s(s-1) = s^2 - s$. La matrice H risulta pertanto:

$$H = [\,0 \quad -1 \quad 1\,].$$

ii) La coppia (F, G) è una forma canonica di controllo, pertanto è una coppia raggiungibile. Pertanto, attraverso un'opportuna scelta della matrice di retroazione $K = [\,a \quad b \quad c\,]$ possiamo attribuire alla matrice $F + GK$ (ancora in forma compagna) un arbitrario polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico desiderato per avere i modi richiesti risulta $p(s) = (s+1)^2(s+2)$ e bisogna poi verificare che l'autovalore -1 sia associato ai due modi distinti e^{-t} ed te^{-t}. Si ottiene:

$$K = [\,-2 \quad -6 \quad -4\,],$$

che porge:

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo della molteplicità geometrica associata a -1 è pari a $s_{-1} = 1$, il che garantisce l'esistenza dei due modi associati. Il controllore K è pertanto quello richiesto.

iii) La coppia (F, H) è non osservabile in quanto la matrice di osservabilità non ha rango pieno:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

e il test PBH evidenzia come l'autovalore non osservabile sia -1, compatibile con la richiesta del modo e^{-t}.

Il polinomio caratteristico desiderato per $F + LH$ è:

$$p(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6.$$

La generica matrice $L = [\, a \quad b \quad c \,]^\top$, porge

$$\Delta_{F+LH}(s) = s^3 + (a+b)s^2 + (b+c-1)s + (c-a).$$

Uguagliando $\Delta_{F+LH}(s)$ a $p(s)$ si ottiene $L = [\, a \quad 6-a \quad 6+a \,]^\top$, con a parametro reale arbitrario.

Esercizio 3.

i) Il problema consiste nell'attribuire al sistema retroazionato una funzione di trasferimento $w_K(z)$ i cui poli siano tutti collocati nell'origine, senza che la matrice $F+GK$ del sistema sia nilpotente, ovvero abbia tutti gli autovalori nell'origine.

Il sistema è in forma standard di controllo con $F_{22} = [\, 0 \,]$, e quindi l'autovalore non raggiungibile è 0.

Il calcolo della funzione di trasferimento del sistema di partenza fornisce

$$w(z) = H(zI - F)^{-1}G = -\frac{z+1}{(z-1)(z+2)},$$

e la funzione di trasferimento del sistema retroazionato con matrice di retroazione K sarà del tipo

$$w_K(z) = \frac{z+1}{\Delta_{F+GK}(z)}.$$

Pertanto il problema è risolubile attribuendo alla matrice $F+GK$ il polinomio caratteristico $p(z) = z^2(z+1)$: in tal modo, infatti, la $w_K(z)$ avrà solo poli in 0, nonostante $F+GK$ non sia nilpotente. Imponendo, quindi, la matrice generica $K = [\, a \quad b \quad c \,]$, si ottiene $\Delta_{F+gK}(z) = z^3 + z^2(1-a+b) + z(3b-a-2)$, che posto uguale a $p(z)$ fornisce $K = [\, 1 \quad 1 \quad c \,]$, con c parametro reale arbitrario.

ii) La richiesta di un regolatore deadbeat si traduce, per il principio di separazione, nella richiesta di un controllore deadbeat e di uno stimatore deadbeat.

Dal punto precedente si ha che è possibile progettare un controllore deadbeat, che, eguagliando $\Delta_{F+gK}(z)$ a $p(z) = z^3$, risulta pari a $K = [\, 5/2 \quad 3/2 \quad c \,]$.

La matrice di osservabilità della coppia (F, H) vale

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

che non ha rango pieno. Peraltro, il test PBH evidenzia l'autovalore nullo come autovalore non osservabile. Il problema ha pertanto soluzione.

Consideriamo una matrice generica $L = [\, \alpha \quad \beta \quad \gamma \,]^\top$ e calcoliamo la matrice che governa l'evoluzione dell'errore di stima:

$$F + LH = \begin{bmatrix} -1-\alpha & -1 & -1-\alpha \\ -2-\beta & 0 & -2-\beta \\ -\gamma & 0 & -\gamma \end{bmatrix}.$$

Imponendo l'uguaglianza del polinomio caratteristico $\Delta_{F+LH} = z^3 + z^2(1+\alpha+\gamma) + z(-2-\beta)$ con il polinomio desiderato $p(z) = z^3$, si ottiene

$$L = \begin{bmatrix} \alpha \\ -2 \\ -1-\alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

A una diversa soluzione si può pervenire osservando la struttura di $F + LH$ e cercando di renderla nilpotente.