TEORIA DEI SISTEMI e IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI (IMC - 12 CFU)
COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
15 Febbraio 2012 - A.A. 2011-2012

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = \left(\sin^2 x_1(t) - 1\right) u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = \left(2\cos^2 x_2(t) + \sin^2 x_2(t) + 2\cos x_2(t)\right) \cos\left(x_2(t)u(t)\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

i) *pt.5* Si determinino, al variare di $\bar{u}$ in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}, t \in \mathbb{R}_+$.

ii) *pt.4* Per $\bar{u} = 1$, si determini il modello linearizzato del sistema in corrispondenza a ciascuno dei punti di equilibrio (generici).

[Suggerimento: si ricordino le formule trigonometriche di base.]

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

i) *pt.5* Si determinino i sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità a zero in k passi per $k = 1, 2, 3, \ldots$.

ii) *pt.3.5* Si determini, se possibile, un ingresso di controllo che mandi lo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ a $\mathbf{x}_f = \begin{bmatrix} 14 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ nel minimo numero di passi.

ii) *pt.4.5* Si calcoli la funzione di trasferimento $W(z)$ e si determini, se possibile, una sollecitazione di ingresso a cui corrisponde l'evoluzione forzata di uscita $y_f(t) = t = \binom{t}{1}$ (per $t \in \mathbb{Z}_+$).

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= H\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

i) *pt.3.5* Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione K che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $p(z) = z(z^2 - \frac{1}{4})$.

ii) *pt.4.5* Si calcoli, se possibile, uno stimatore dello stato tale che l'errore di stima evolva unicamente con i modi $\delta(t)$ e $\left(-\frac{1}{2}\right)^t$.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} 0 &= \left(\sin^2 x_{1e} - 1\right)\bar{u} \\ 0 &= \left(\cos x_{2e} + 1\right)^2 \cos\left(x_{2e}\bar{u}\right). \end{cases}$$

Distinguiamo due casi:

- $\bar{u} = 0$;
  la prima equazione ammette come soluzioni $\forall x_{1e}$;
  la seconda equazione porge $\cos(x_{2e}) = -1$, che ha soluzione: $x_{2e} = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Pertanto: $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, -\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

- $\bar{u} \neq 0$;
  dalla prima equazione si ha $\sin(x_{1e}) = \pm 1$, da cui $x_{1e} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
  la seconda equazione porge $\left(\cos(x_{2e}) + 1\right)^2 \cos\left(x_{2e}\bar{u}\right)$ che ha due famiglie di soluzioni: $x_{2e} = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ oppure $x_{2e} = \frac{1}{\bar{u}}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
  Pertanto: $\mathbf{x}_e = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, -\pi + 2h\pi\right), k, h \in \mathbb{Z}$ e $\mathbf{x}_e = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{1}{\bar{u}}\left(\frac{\pi}{2} + h\pi\right)\right), k, h \in \mathbb{Z}$.

ii) Le equazioni del sistema non lineare sono del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)), \end{cases}$$

e per $u(t) = \bar{u} = 1$ tale sistema presenta come punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, -\pi + 2h\pi\right), k, h \in \mathbb{Z}$, e $\mathbf{x}_e = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi\right), k, h \in \mathbb{Z}$. Il sistema linearizzato in un intorno di ciascuno dei precedenti punti assume la forma

$$\delta\dot{x}(t) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

dove

$$F = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \left.\begin{bmatrix} \bar{u}(2\sin x_{1e}\cos x_{1e}) & 0 \\ 0 & -2(\cos x_{2e} + 1)\sin x_{2e}\cos(x_{2e}\bar{u}) - (\cos x_{2e} + 1)^2 \sin(x_{2e}\bar{u})\bar{u} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1};$$

$$G = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \left.\begin{bmatrix} \sin^2 x_{1e} - 1 \\ -(\cos x_{2e} + 1)^2 \sin(x_{2e}\bar{u})x_{2e} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1}.$$

Pertanto nei punti di equilibrio del tipo $\mathbf{x}_e = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, -\pi + 2h\pi\right), k, h \in \mathbb{Z}$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mentre nei punti di equilibrio del tipo $\mathbf{x}_e = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi\right), k, h \in \mathbb{Z}$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{2} - h\pi \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.

i) Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im}G = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \\
X_3^R &= \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\\0 & 0 & 0\\1 & 2 & 4\end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \neq \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Pertanto il sistema non è raggiungibile e il sottospazio raggiungibile coincide con $X_2^R = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle$.

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im}G\} = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}3a+b\\b\\-2b+2c\end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{c} b=0 \\ 3a+b=-2b+2c \end{array} \right. \right\} = \langle \begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix} \rangle, \\
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}9a+4b\\b\\-6b+4c\end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} : b=0 \right\} = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle, \\
X_3^C &= \{\mathbf{x} : F^3\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG \quad F^2G\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}27a+13b\\b\\-14b+8c\end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} : b=0 \right\} = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \neq \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Pertanto il sistema non è controllabile e il sottospazio controllabile coincide con $X_2^C = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle$.

ii) Valutiamo dapprima se lo stato $\mathbf{x}_f$ è raggiungibile in un passo a partire da $\mathbf{x}_0$. Dall'equazione di aggiornamento in un passo $\mathbf{x}_f = F\mathbf{x}_0 + Gu(0)$, si ottiene $\mathbf{x}_f - F\mathbf{x}_0 = Gu(0)$:

$$\mathbf{x}_f - F\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}10\\0\\0\end{bmatrix} \notin \mathrm{Im}G = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \rangle.$$

Pertanto non esiste l'ingresso desiderato in un passo.

Valutiamo ora se esiste la soluzione in due passi. Dall'equazione di aggiornamento in due passi $\mathbf{x}_f = F^2\mathbf{x}_0 + [\,G \quad FG\,]\begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$, si ottiene $\mathbf{x}_f - F^2\mathbf{x}_0 = [\,G \quad FG\,]\begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$

$$\mathbf{x}_f - F^2\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle.$$

Pertanto esiste l'ingresso desiderato in due passi, e risulta:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

iii) Si verifica facilmente come la coppia (F, H) sia una forma standard di osservabilità, il che evidenzia un autovalore non osservabile posto in 2, e riduce il calcolo della $W(z)$ al calcolo della funzione di trasferimento del solo sottosistema osservabile (quindi di dimensione 2); risulta pertanto:

$$W(z) = [\,1 \quad 1\,] \left(\begin{bmatrix} z-3 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z-1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-3}.$$

La successione d'uscita $y_f(t) = t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ ha trasformata zeta $Y_f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$. La trasformata zeta della corrispondente successione di ingresso si ottiene facilmente come

$$U(z) = \frac{Y_f(z)}{W(z)} = \frac{z\,(z-3)}{(z-1)^2}$$

La decomposizione in fratti semplici di $U_1(z) = \frac{U(z)}{z} = \frac{z-3}{(z-1)^2}$ porta a

$$U_1(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} \quad \Rightarrow \quad U(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{(z-1)^2},$$

la cui antitrasformata è

$$u(t) = \delta_{-1}(t) - 2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = (1-2t)\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 3.

i) La matrice F è in forma compagna, per cui è immediato calcolarne lo spettro che risulta $\sigma_F = \{0, -2, 1\}$ (si noti però che la coppia (F, G) non è in forma canonica di controllo). La matrice di raggiungibilità del sistema risulta

$$\mathcal{R} = [\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

di rango 3: il sistema è pertanto raggiungibile e il problema posto ha soluzione.

Consideriamo una matrice parametrica $K = [\,a \quad b \quad c\,]$, da cui si ottiene

$$F + GK = \begin{bmatrix} a & 1+b & c \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 2+b & c-1 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico risulta

$$\Delta_{F+GK}(z) = z^3 + (1-a-c)z^2 + (-2-a-b)z + a.$$

Eguagliando il polinomio caratteristico richiesto $p(z) = z^3 - \frac{1}{4}z$ a $\Delta_{F+GM_2+g_2k_2}(z)$, si ottiene

$$K = [\,0 \quad -\tfrac{7}{4} \quad 1\,].$$

iii) La coppia (F, H) non è osservabile, giacché $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ha rango pari a 2.

Il test PBH di osservazione evidenzia l'autovalore non osservabile posto in 0, in quanto:

$$PBH_O|_{\lambda=0} = \begin{bmatrix} \lambda I - F \\ H \end{bmatrix} \Bigg|_{\lambda=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango pari a 2. Pertanto esiste uno stimatore L t.c. il polinomio caratteristico Δ_{F+LH} è multiplo di (z):

$$\Delta_{F+LH} = zB(z),$$

con $B(z)$ polinomio di grado 2.

I polinomi caratteristici compatibili con le specifiche del problema sono pertanto:

$$\begin{aligned} p^A(z) &= z^2\left(z+\frac{1}{2}\right) = z^3 + \frac{1}{2}z^2; \\ p^B(z) &= z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = z^3 + z^2 + \frac{1}{4}z. \end{aligned}$$

Consideriamo una matrice parametrica $L = [\,a \quad b \quad c\,]^\top$, da cui si ottiene $F{+}LH = \begin{bmatrix} 0 & 1+a & a \\ 0 & b & 1+b \\ 0 & 2+c & c-1 \end{bmatrix}$, e quindi

$$\begin{aligned} L^A &= [\,a \quad -\tfrac{5}{4} \quad \tfrac{7}{4}\,]^\top; \\ L^B &= [\,a \quad -\tfrac{9}{8} \quad \tfrac{9}{8}\,]^\top, \end{aligned}$$

in corrispondenza ai due polinomi evidenziati.

Per avere due soli modi occorre andare ad analizzare la molteplicità geometrica dell'autovalore doppio nei due casi e dal calcolo di tale valore si evidenzia come:

- nel caso A, per $a = \frac{1}{4}$, la molteplicità geometrica relativa all'autovalore 0 è pari a 2, per cui si hanno due miniblocchi e un unico modo relativo all'autovalore in questione;
- nel caso B non vi sono valori di a per cui la molteplicità geometrica relativa all'autovalore $-1/2$ sia pari a 2, per cui si avrà sempre un miniblocchi e due modi relativi all'autovalore in questione.

La soluzione al problema posto è pertanto:

$$L = [\,\tfrac{1}{4} \quad -\tfrac{5}{4} \quad \tfrac{7}{4}\,]^\top.$$