COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)
COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI (IMC - 6 CFU)
6 Settembre 2011 - A.A. 2010-2011

Esercizio 1. Si consideri il modello di stato a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ -1 & 1-2a \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= Hx(k)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determinino, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e si studino stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema;

ii) per $a = 1/2$ si determini, se possibile, l'ingresso $u(k)$ che produce la seguente evoluzione forzata di uscita:

$$y(k) = \frac{5}{4}(-1)^{k-3}\delta_{-1}(k-3);$$

iii) **[Solo per IMC 9CFU]** si studi, al variare di $a \in \mathbb{R}$, raggiungibilità ed osservabilità del sistema. Si dia una interpretazione dei vari casi aiutandosi con uno schema a blocchi riferito alla decomposizione canonica di Kalman.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

i) Progettare, se possibile, un controllo in retroazione dal solo primo ingresso in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti solo modi puramente esponenziali.

ii) Progettare, se possibile, un controllo in retroazione dal solo secondo ingresso in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti solo i modi 1 e t.

iii) Progettare, se possibile, un controllo in retroazione in modo tale che la prima componente della funzione di trasferimento del risultante sistema retroazionato abbia solo un polo ed esso sia collocato in -1.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(k), \qquad t \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia di tipo F.I.R. (ovvero a risposta impulsiva finita) senza essere a memoria finita.

ii) **[Solo per IMC 6CFU]** Si progetti, se possibile, un osservatore deadbeat.

Teoria. Si ricavino le equazioni del regolatore e si discuta il principio di separazione.

<u>*NOTA*</u>*: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.*

SOLUZIONI

Esercizio 1.
i) **[4 punti]** Lo spettro presunto della matrice F è $\sigma_F = \{a^2, 1-2a\}$, e i due autovalori coincidono se $a = -1 \pm \sqrt{2}$.

In tal caso, la dimensione dell'autospazio relativo all'unico autovalore doppio λ è pari a 1 e pertanto la forma di Jordan della matrice F presenta un solo miniblocco di dimensione 2 relativamente all'autovalore in esame:

$$F_J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Se, invece, i due autovalori sono distinti, ovvero $a \neq -1 \pm \sqrt{2}$, allora la matrice F è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è

$$F_J = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1-2a \end{bmatrix}.$$

Per quanto concerne lo studio della stabilità, è immediato rendersi conto del fatto che abbiamo stabilità asintotica se e solo se

$$|a^2| < 1 \quad |1-2a| < 1,$$

pertanto per $0 < a < 1$. Per $a = 0$ abbiamo un autovalore nullo e un autovalore semplice in 1 e quindi stabilità semplice. Per $a = 1$ abbiamo un autovalore semplice in 1 e uno in -1 e quindi anche in questo caso si ha stabilità semplice.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(z) = H(zI-F)G = [\,1 \quad -1\,] \begin{bmatrix} z-a^2 & 0 \\ 1 & z-1+2a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a^2+2a}{(z-a^2)(z-1+2a)}.$$

È importante evidenziare come per $a = 0, -2$ la funzione di trasferimento del sistema si annulli e in tale situazione il sistema diventa banalmente BIBO stabile. Per $a \neq 0, -2$, invece, non possono subentrare cancellazioni tra numeratore e denominatore, e quindi non si può avere stabilità BIBO senza stabilità asintotica. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in -2 \cup [0, 1)$.

ii) **[3.5 punti]** Per $a = 1/2$ la matrice F diventa $F = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e la funzione di trasferimento del sistema vale

$$W(z) = \frac{5/4}{z(z-1/4)}.$$

La successione di uscita ha trasformata zeta

$$Y(z) = \frac{5}{4} z^{-3} \frac{z}{z+1}.$$

Si trova:

$$Y(z) = W(z)U(z) \Rightarrow U(z) = \frac{z-1/4}{z(z+1)},$$

a cui corrisponde la successione di ingresso

$$u(k) = (-1)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) - \frac{1}{4}(-1)^{k-2}\delta_{-1}(k-2) = \delta(k-1) - \frac{5}{4}(-1)^{k-2}\delta_{-1}(k-2).$$

iii) **[3 punti]** La matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R} = [\,G \quad FG\,] = \begin{bmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & -2a \end{bmatrix},$$

che ha come determinante $\Delta_{\mathcal{R}} = -a(a+2)$. Pertanto il sistema è raggiungibile se e solo se $a \neq 0, -2$.

Similmente, la matrice di osservabilità vale

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a^2+1 & 2a-1 \end{bmatrix},$$

che ha come determinante $\Delta_{\mathcal{O}} = a(a+2)$. Pertanto il sistema è osservabile se e solo se è raggiungibile, ovvero per $a \neq 0, -2$.

Esercizio 2.

i) **[3.5 punti]** La coppia (F, g_1) è praticamente una forma canonica di controllo (a meno di un cambio di scala in g_1), pertanto è una coppia raggiungibile (in alternativa si può effettuare il calcolo della matrice di raggiungibilità). Pertanto, attraverso un'opportuna scelta della matrice di retroazione $k_1 = [\,a \quad b \quad c\,]$ possiamo attribuire alla matrice $F+g_1k_1$ un arbitrario polinomio caratteristico. Il polinomio caratteristico della matrice retroazionata risulta:

$$\Delta_{F+g_1k_1}(s) = s^3 + (2-2c)s^2 + (-1-2b)s + (2-2a).$$

Per avere modi puramente esponenziali, si può scegliere un polinomio $p(s)$ con zeri distinti, ad esempio:

$$p(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6.$$

Uguagliando il polinomio $\Delta_{F+g_1k_1}(s)$ a $p(s)$ si ricavano i valori della matrice di retroazione:

$$k_1 = [\,-2 \quad -6 \quad -2\,].$$

iii) **[3.5 punti]** La coppia $(F, g2)$ è raggiungibile (da un solo ingresso) in quanto la matrice di raggiungibilità ha rango pieno:

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix};$$

pertanto è possibile allocare qualsiasi polinomio caratteristico, e in particolare l'unico polinomio caratteristico compatibile con i modi richiesti: $p(s) = s^3$. La matrice di stato retroazionata con una generica matrice di retroazione $k_2 = [\,a \quad b \quad c\,]$ risulta

$$F + g_2k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & b & c+1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

con polinomio caratteristico

$$\Delta_{F+g_2k_2}(s) = s^3 + (2-b)s^2 + (-1-2b-c-a)s + (2-2a+2c).$$

Uguagliando $\Delta_{F+g_2k_2}(s)$ a $p(s)$ si ottiene

$$k_2 = [\,-2 \quad 2 \quad -3\,],$$

che non presenta gradi di libertà. Pertanto per avere due soli modi la matrice dovrebbe presentare due blocchi nella forma di Jordan relativamente all'autovalore nullo. Il calcolo della molteplicità geometrica peraltro risulta:

$$s_0 = \dim\ker(0I - F) = 1,$$

che implica la presenza di un unico miniblocco nella forma di Jordan, e di conseguenza la presenza di 3 modi legati all'autovalore nullo. Non è pertanto possibile soddisfare la specifica richiesta.

iii) **[4 punti]** Ai fini della soluzione del problema è sufficiente far uso di un controllo in retroazione dal solo primo ingresso, e pertanto fare riferimento a un sistema SISO. Sfruttando il fatto che (F, g_1) è praticamente una forma canonica di controllo (a meno di un cambio di scala in g_1), la funzione di trasferimento $w_1(s)$ si può scrivere direttamente dai coefficienti di H (numeratore) e dell'ultima riga di F (denominatore):

$$w_1(s) = 2\frac{s^2+1}{s^3+2s^2-s+2}.$$

Una retroazione generica $k_1 = [\,a \quad b \quad c\,]$ va a modificare solo il denominatore della funzione di trasferimento: per soddisfare i requisiti richiesti si deve allocare a denominatore il polinomio $p(s) = (s^2+1)(s+1)$, in modo da avere cancellazione del numeratore e un unico polo in -1. Dopo alcuni calcoli si ottiene

$$k_1 = [\,1/2 \quad -1 \quad 1/2\,].$$

Esercizio 3.

i) **[4 punti]** Il problema consiste nell'attribuire al sistema retroazionato una funzione di trasferimento $w_K(z)$ i cui poli siano tutti collocati nell'origine, senza che la matrice $F+GK$ del sistema sia nilpotente, ovvero abbia tutti gli autovalori nell'origine. La matrice di raggiungibilità della coppia (F,G) risulta pari a:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

di rango pieno: il sistema è dunque raggiungibile.

Il calcolo della funzione di trasferimento del sistema di partenza fornisce

$$w(z) = H(zI-F)^{-1}G = \frac{z-2}{z(z-1)(z+1)},$$

e, poichè il sistema è raggiungibile, la funzione di trasferimento del sistema retroazionato con matrice di retroazione K sarà del tipo

$$w_K(z) = \frac{z-2}{\Delta_{F+gK}(z)}.$$

Pertanto il problema è risolubile attribuendo alla matrice $F+gK$ il polinomio caratteristico $p(z) = z^2(z-2)$: in tal modo, infatti, la $w_K(z)$ avrà solo poli in 0, nonostante $F+gK$ non sia nilpotente. Imponendo, quindi, la matrice generica $K = [\,a \quad b \quad c\,]$, si ottiene $\Delta F + gK(z) = z^3 - cz^2 - (1+c?b)z + a$, che posto uguale a $p(z)$ fornisce $K = [\,0 \quad 3 \quad 2\,]$.

ii) **[3 punti]** La matrice di osservabilità della coppia (F,H) vale

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

che ha rango pieno: esiste dunque soluzione al problema. Consideriamo una matrice generica $L = [\,a \quad b \quad c\,]^\top$ e calcoliamo la matrice che governa l'evoluzione dell'errore di stima:

$$F+LH = \begin{bmatrix} 2a & 1-a & 0 \\ 2b & -1-b & -1 \\ 2c & -c & 1 \end{bmatrix}.$$

Imponendo l'uguaglianza del polinomio caratteristico $\Delta_{F+LH} = z^3 + (b-2a)z^2 + (-1-3b-c)z + (2a + 2b + 2c)$ con il polinomio desiderato $p(z) = z^3$, si ottiene

$$L = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Teoria. **[5 punti]** Si veda il libro di testo E.Fornasini, G. Marchesini "Teoria dei Sistemi.