COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)
COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI (IMC/IG - 6 CFU)
12 Luglio 2011 - A.A. 2010-2011

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = \left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)} - u(t)\right) x_1(t) - \left(\frac{x_1(t)}{x_2(t)} - u(t)\right) u(t), \\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = 2x_1(t) + x_1(t)x_2(t)u(t) + 1, \qquad t \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

i) Si determinino, al variare dell'ingresso costante $\bar{u}$ in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema. *[Suggerimento: si proceda dalla prima equazione].*

ii) Si linearizzi il sistema in corrispondenza ai punti di equilibrio che si ottengono applicando l'ingresso costante $\bar{u} = -1$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

i) Si determini, se esiste, una matrice di cambio di base T in modo tale che il sistema $(T^{-1}FT, T^{-1}g)$ sia in forma canonica di controllo e si scriva esplicitamente tale forma canonica di controllo.

ii) Si calcoli, se esiste, la sequenze di ingresso ottima che fa evolvere lo stato del sistema da $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ a $x_f = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ in tre passi.

iii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera di stato a partire un generico stato iniziale x_0 e, se possibile, si calcoli la famiglia di stati iniziali a cui corrisponde una evoluzione libera limitata.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Fx(t) + [\,g_1 \quad g_2\,]\, u(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad \alpha \quad \alpha - 1\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}$$

con α parametro reale.

i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione K stabilizzante che faccia uso di entrambi gli ingressi. A tal fine è richiesto di utilizzare il Lemma di Heymann in modo da rendere preliminarmente il sistema raggiungibile dal primo ingresso.

ii) Si ricavino i valori del parametro α per cui il sistema (F, g_2, H) risulta non osservabile ma BIBO stabile.

Teoria. (Solo per IMC-9CFU) Si ricavi la forma di Kalman per un sistema lineare $\Sigma = (F, G, H)$ e la si commenti aiutandosi con uno schema a blocchi.
Teoria. (Solo per IMC/IG-6CFU) Dato un sistema $\Sigma = (F, G, H)$ e il corrispondente sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$, si enuncino e si dimostrino le proposizioni sulla raggiungibilità - non raggiungibilità di Σ_K a partire dalle corrispondenti proprietà del sistema Σ.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

SOLUZIONI

Esercizio 1.
i) **[3.5 punti]** Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ in corrispondenza dell'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} 0 = \left(\frac{x_{1e}}{x_{2e}} - \bar{u}\right) x_{1e} - \left(\frac{x_{1e}}{x_{2e}} - \bar{u}\right) \bar{u} \\ 0 = 2x_{1e} + x_{1e}x_{2e}\bar{u} + 1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione

$$0 = \left(\frac{x_{1e}}{x_{2e}} - \bar{u}\right)(x_{1e} - \bar{u}),$$

si ottiene $x_{1e} = \bar{u}$ o $x_{1e} = x_{2e}\bar{u}$. Si noti il vincolo imposto dal sistema $x_{2e} \neq 0$ ($x_2(t) \neq 0$).

- Sostituendo $x_{1e} = \bar{u}$ nella seconda equazione si ottiene $x_{2e} = -\frac{1+2\bar{u}}{\bar{u}^2}$ se $\bar{u} \neq 0$ e $\bar{u} \neq -\frac{1}{2}$ (per avere $x_{2e} \neq 0$).
- Sostituendo $x_{1e} = x_{1e}\bar{u}$ nella seconda equazione si ottiene:

  $$(1 + x_{2e}\bar{u})^2 = 0,$$

  da cui $x_{2e} = -\frac{1}{\bar{u}}$ (e di conseguenza $x_{1e} = -1$), sempre se $\bar{u} \neq 0$.

Riassumendo:

- per $\bar{u} \neq 0$ e $\bar{u} \neq -\frac{1}{2}$, si hanno due punti di equilibrio: $\mathbf{x}_e = \left(\bar{u}, -\frac{1+2\bar{u}}{\bar{u}^2}\right)$ e $\mathbf{x}_e = \left(-1, -\frac{1}{\bar{u}}\right)$; si noti che per $\bar{u} = -1$ i due punti di equilibrio coincidono;
- per $\bar{u} = -\frac{1}{2}$: $\mathbf{x}_e = (-1, 2)$;
- per $\bar{u} = 0$, non ci sono punti di equilibrio.

ii) **[3.5 punti]** Il sistema linearizzato in un intorno del punto di equilibrio (che come si è visto è unico per $\bar{u} = -1$) assume la forma

$$\dot{\delta x}(t) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

per l'equazione di stato, dove

$$\begin{aligned} F &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e,\bar{u}} = \left.\begin{bmatrix} 2\frac{x_{1e}}{x_{2e}} - \frac{\bar{u}}{x_{2e}} - \bar{u} & -\frac{x_{1e}^2}{x_{2e}^2} + \frac{x_{1e}}{x_{2e}}\bar{u} \\ 2 + x_{2e}\bar{u} & x_{1e}\bar{u} \end{bmatrix}\right|_{(-1,1),-1} \\ G &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e,\bar{u}} = \left.\begin{bmatrix} -\frac{x_{1e}}{x_{2e}} - x_{1e} + 2\bar{u} \\ x_{1e}x_{2e} \end{bmatrix}\right|_{(-1,1),-1}, \end{aligned}$$

che numericamente porge

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.
i) **[3.5 punti]** Poiché la matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = [\, g \quad Fg \,] = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno, la coppia (F, g) è raggiungibile e quindi è algebricamente equivalente ad una coppia in forma canonica di controllo. Il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(z) = \det \begin{bmatrix} z+3 & -1 \\ 2 & z \end{bmatrix} = (z+2)(z+1) = z^2 + 3z + 2.$$

Di conseguenza la forma canonica di controllo della coppia (F, g) è immediatamente determinata:

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A questo punto, per determinare la matrice T di cambio di base, è utile ricordare che, se T è la matrice di cambio di base che fa passare da (F, g) a (F_c, g_c), le matrici di raggiungibilità della coppia (F, g) e della coppia (F_c, g_c), rispettivamente $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_c$, sono legate tra loro dalla relazione

$$\mathcal{R}_c = T^{-1}\mathcal{R}.$$

Da ciò segue

$$T^{-1} = \mathcal{R}_c\mathcal{R}^{-1}$$

e quindi

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}.$$

Calcoliamo allora $\mathcal{R}_c$:

$$\mathcal{R}_c = [\, g_c \quad F_c g_c \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

da cui

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

ii) **[3.5 punti]** Poichè il sistema è raggiungibile, il problema è sicuramente risolubile. In tre passi, si ha:

$$x_f = F^3 x_0 + [\, g \quad Fg \quad F^2 g \,] \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \mathcal{R}_3 u_3,$$

che fornisce un sistema lineare sottodeterminato in due equazioni in tre incognite. Si può peraltro trovare la soluzione ottima attraverso l'introduzione di una variabile ausiliaria η_3 come segue:

$$\begin{aligned} x_f - F^3 x_0 &= \mathcal{R}_3 u_3 \\ x_f - F^3 x_0 &= \mathcal{R}_3 \mathcal{R}_3^\top \eta_3 \end{aligned}$$

da cui

$$\eta_3 = \left(\mathcal{R}_3\mathcal{R}_3^\top\right)^{-1} \left(x_f - F^3 x_0\right) \Rightarrow u_3 = \mathcal{R}_3^\top \eta_3.$$

Numericamente si ha

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} -2/3 & 5/3 & -11/3 \\ -1/3 & 4/3 & -10/3 \end{bmatrix},$$

da cui deriva:

$$\eta = \begin{bmatrix} -12 \\ 15 \end{bmatrix},$$

e

$$u(0) = -6 \quad u(1) = 0 \quad u(2) = 3.$$

iii) **[4.5 punti]** Calcolando alcune potenze successive della matrice F

$$F^2 = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \quad F^3 = \begin{bmatrix} -15 & 7 \\ -14 & 6 \end{bmatrix} \quad F^4 = \begin{bmatrix} 31 & -15 \\ 30 & -14 \end{bmatrix} \quad \cdots$$

e tenendo conto dei modi del sistema, $(-2)^t$ e $(-1)^t$, si ricava l'espressione della potenza generica

$$F^t = \begin{bmatrix} 2(-2)^t - (-1)^t & -(-2)^t + (-1)^t \\ 2(-2)^t - 2(-1)^t & -(-2)^t + 2(-1)^t \end{bmatrix}$$

che risulta valida per $t \geq 0$.
Di conseguenza, la generica evoluzione libera con stato iniziale $x_0 = [\, x_{10} \quad x_{20} \,]^\top$ assume la forma

$$x(t) = F^t x_0 = \begin{bmatrix} (-2)^t\,(2x_{10} - x_{20}) + (-1)^t\,(-x_{10} + x_{20}) \\ (-2)^t\,(2x_{10} - x_{20}) + (-1)^t\,(-2x_{10} + 2x_{20}) \end{bmatrix}.$$

Per avere una evoluzione libera di stato limitata, è necessario che scompaia il modo divergente $(-2)^t$, pertanto deve essere

$$2x_{10} = x_{20},$$

ossia

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 2x_{10} \end{bmatrix}.$$

La corrispondente evoluzione libera diventa dunque:

$$x(t) = F^t x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_{10}(-1)^t.$$

Esercizio 3.

i) **[4.5 punti]** La matrice di raggiungibilità del sistema risulta

$$\mathcal{R} = [\, g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad F^2 g_1 \quad F^2 g_2 \,] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

ovviamente di rango 3. Tuttavia è immediato verificare che nessuna delle due coppie (F, g_1) e (F, g_2) è raggiungibile. Utilizziamo il lemma di Heymann per costruire una matrice M_1 di pre-retroazione che renda il sistema retroazionato $(F + GM_1, G)$ raggiungibile dal solo primo ingresso (i.e. la coppia $(F + GM_1, g_1)$ deve essere raggiungibile). Si costruiscono dapprima la matrice Q_1, selezionando in modo opportuno le colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{R}$, e la matrice S_1 ad essa correlata

$$Q_1 = [\, g_1 \quad Fg_1 \quad g_2 \,] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta

$$M_1 = S_1 Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e operando la pre-retroazione si ottiene

$$F + GM_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il sistema pre-retroazionato risulta raggiungibile dal primo ingresso e attraverso una matrice parametrica $k_1 = [\, a \quad b \quad c \,]$, si ottiene

$$F + GM_1 + g_1 k_1 = \begin{bmatrix} 2a - 1 & 2b - 2 & 1 + 2c \\ a - 1 & b & c - 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico risulta

$$\Delta_{F+GM_1+g_1k_1}(s) = s^3 + (2 - 2a - b)s^2 + (-c)s + (-a + b + c).$$

Eguagliando $\Delta_{F+GM_1+g_1k_1}(s)$ a un polinomio caratteristico con zeri a parte reale negativa, ad esempio $p(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$, si ottiene

$$k_1 = [\,-5/3 \quad 7/3 \quad -3\,].$$

La matrice di retroazione complessiva risulta:

$$K = M_1 + \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 & 7/3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii) **[3.5 punti]** La matrice di osservabilità del sistema (F, g_2, H) risulta essere:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha - 1 \\ -\alpha & \alpha - 1 & 1 - \alpha \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha - 1 \end{bmatrix},$$

il cui determinante vale:

$$|\mathcal{O}| = (\alpha - 1)(1 - 3\alpha).$$

Pertanto il sistema risulta essere non osservabile in due casi: per $\alpha = 1$ o per $\alpha = 1/3$.
Calcoliamo ora la funzione di trasferimento, che risulta:

$$W(s) = [\,0 \quad \alpha \quad \alpha - 1\,] \begin{bmatrix} s+1 & 2 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che dopo alcuni calcoli porge:

$$W(s) = -\frac{\alpha s + 2\alpha - 1}{(s+1)(s-1)}$$

(si noti come l'autovalore non raggiungibile -2 non compaia fra i poli della $W(s)$). Per avere un sistema BIBO stabile, si deve avere la cancellazione del polo in 1, ossia

$$\frac{2\alpha - 1}{\alpha} = -1.$$

Segue $\alpha = 1/3$.

Teoria. **[5 punti]** Si veda il libro di testo E.Fornasini, G. Marchesini "Teoria dei Sistemi, Cap. 6/7.