COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)
COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI (IMC/IG - 6 CFU)
24 Giugno 2011 - A.A. 2010-2011

Esercizio 1. Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= Hx(t) = [\,-1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \geq 0.
\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità semplice e asintotica del sistema, indicando inoltre la forma di Jordan della matrice F ed evidenziando i modi e il loro carattere.

ii) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'osservabilità del sistema, discutendo inoltre l'esistenza di uno stimatore asintotico.

iii) Si calcoli la matrice di trasferimento del sistema e si discuta la stabilità BIBO, sempre al variare di a in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 1 \quad 2\,]\, x(t), \qquad t \geq 0.
\end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, un controllore deadbeat per il sistema, che renda la matrice del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo.

ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore dallo stato tale che l'evoluzione dell'errore di stima presenti solamente modi impulsivi.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0.
\end{aligned}$$

i) Si calcolino, per ogni t, i sottospazi di raggiungibilità e controllabilità in t passi.

ii) Si calcoli, operando nel dominio delle trasformate, se esiste, un ingresso che produca la seguente evoluzione forzata di uscita

$$y(t) = \begin{bmatrix} (-1)^{t-1}\delta_{-1}(t-1) \\ \frac{1}{2}\delta(t-1) \end{bmatrix}$$

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Dato un modello di stato a tempo continuo, tempo invariante,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\end{aligned}$$

si definisca il concetto di punto di equilibrio del sistema in corrispondenza ad ingresso costante e si illustri il processo di linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio e le ipotesi necessarie per poter effettuare la linearizzazione.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) **[4 punti]** La matrice di stato presenta come autovalori presunti $\sigma_F = \{0, 1-a^2, a-1\}$, e al variare di $a \in \mathbb{R}$ si presentano quattro casi, per $a = 1$, $a = -1$, $a = -2$, $a \neq 1, -1, -2$.

- per $a = 1$, si ha $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica $n_1 = 3$; la molteplicità geometrica risulta essere $s_1 = 2$ (2 miniblocchi nella forma di Jordan), per cui si deriva la seguente forma di Jordan:

  $$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  I modi risultano $m_1(t) = 1$ (limitato) e $m_2(t) = t$ (divergente). Il sistema è instabile.

- per $a = -1$, si ha $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica $n_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$, con molteplicità algebrica $n_2 = 1$; la molteplicità geometrica di λ_1 risulta essere $s_1 = 1$ (1 miniblocco nella forma di Jordan), per cui si deriva la seguente forma di Jordan:

  $$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

  I modi risultano $m_1(t) = 1$ (limitato), $m_2(t) = t$ (divergente) e $m_3(t) = e^{-2t}$ (convergente). Il sistema è instabile.

- per $a = -2$, si ha $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica $n_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$, con molteplicità algebrica $n_2 = 2$; la molteplicità geometrica di λ_2 risulta essere $s_1 = 1$ (1 miniblocco nella forma di Jordan), per cui si deriva la seguente forma di Jordan:

  $$F_J = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  I modi risultano $m_1(t) = 1$ (limitato), $m_2(t) = e^{-3t}$ (convergente) e $m_3(t) = te^{-3t}$ (convergente). Il sistema è semplicemente stabile.

- per $a \neq 1, -1, -2$, si ha $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1-a^2$, e $\lambda_3 = a-1$, tutti con molteplicità algebrica (e quindi geometrica) unitaria. La forma di Jordan sarà una forma diagonale:

  $$F_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

  I modi risultano $m_1(t) = 1$ (limitato), $m_2(t) = e^{(1-a^2)t}$ (convergente se $a < -1$ o $a > 1$) e $m_3(t) = e^{(a-1)t}$ (convergente se $a < 1$). Il sistema (che non può mai essere asintoticamente stabile) è pertanto semplicemente stabile se $a < -1$.

ii) **[3.5 punti]** Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2(a^2-1) & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 1 se $a = 0$, e rango pari a 2 altrimenti. Il sistema risulta pertanto sempre non osservabile. Lo spettro della matrice F risulta $\sigma_F = \{0, 1-a^2, a-1\}$, e per l'esistenza dello stimatore asintotico bisogna ora verificare quali sono gli autovalori del sottosistema non osservabile. A tal fine si può ricorrere al test PBH:

$$PBH = \left[\begin{array}{ccc} s & -1 & 0 \\ 0 & s-(1-a^2) & 0 \\ 0 & -1 & s-(a-1) \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ora:

- per $a \neq 0$, la matrice scende di rango solo in corrispondenza a $s = a-1$, per cui è possibile progettare uno stimatore asintotico se $a-1 < 0$, ossia $a < 1$ (con $a \neq 0$);
- per $a = 0$, lo spettro di F risulta $\sigma_F = \{0, 1, -1\}$. Si può già concludere che non è possibile progettare uno stimatore asintotico, in quanto gli autovalori non osservabili (e quindi non allocabili) sono due e sicuramente uno di questi non dà origine a un modo convergente.
  Peraltro, la matrice PBH diventa

  $$PBH = \left[\begin{array}{ccc} s & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & -1 & s+1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

  che scende di rango in corrispondenza a $s = \pm 1$.

iii) **[3.5 punti]** La matrice di trasferimento risulta dal seguente calcolo:

$$W(s) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s-(1-a^2) & 0 \\ 0 & -1 & s-(a-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che dopo alcuni calcoli porge

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s-2+a^2}{s(s-(1-a^2))} & 0 \end{bmatrix}.$$

Per avere stabilità BIBO occorre innanzitutto cancellare il polo in zero, con lo zero al numeratore, da cui si ottiene $a^2 = 2$, ossia $a = \pm\sqrt{2}$. Per tali valori di a la W(s) si riduce a

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & 0 \end{bmatrix},$$

che presenta un solo polo in -1, risultando quindi BIBO stabile. La cancellazione con l'altro polo, invece, si ottiene se $1 - \frac{a^2}{2} = 1 - a^2$, ossia se $a = 0$: per tale valore di a la W(s) si riduce a

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} & 0 \end{bmatrix},$$

che presentando un polo in 0, non è BIBO stabile.

Esercizio 2.

i) **[4.5 punti]** Lo spettro della matrice F risulta $\sigma_F = \{0, -1, -1\}$, e la matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ha rango pari a 2. Il sistema risulta pertanto non completamente raggiungibile.

La matrice PBH di raggiungibilità risulta,

$$PBH = \left[\begin{array}{ccc|c} s & 1 & 0 & 1 \\ -1 & s+2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & -1 \end{array}\right],$$

che scende di rango solo in corrispondenza all'autovalore non raggiungibile 0. Ne consegue che esiste un controllore deadbeat per il sistema.

Ponendo
$$K = [\, a \quad b \quad c \,],$$
la matrice di stato retroazionata risulta:
$$F + gK = \begin{bmatrix} a & b-1 & c \\ 1 & -2 & 0 \\ -a & 1-b & -c \end{bmatrix}.$$
Il polinomio caratteristico che si ottiene dopo alcuni calcoli è:
$$\Delta_{F+gK}(z) = z^3 + (-a + c + 2)z^2 + (-2a - b + 2c + 1)z,$$
che posto uguale al polinomio desiderato $p(z) = z^3$, fornisce:
$$\begin{aligned} a &= 2 + c \\ b &= -3 \end{aligned}$$
Segue la matrice per il controllore (a un grado di libertà):
$$K = [\, 2 + c \quad -3 \quad c \,].$$

La matrice del sistema retroazionato così ottenuta risulta:
$$F + gK = \begin{bmatrix} 2+c & -4 & c \\ 1 & -2 & 0 \\ -2-c & 4 & -c \end{bmatrix}.$$
Tale matrice non ha ovviamente indice di nilpotenza pari a uno, non essendo nulla e ha sicuramente indice pari a 3 (essendo ottenuta per retroazione con un controllore deadbeat). Rimane da vedere se puo' avere indice di nilpotenza pari a 2.

La molteplicità geometrica dell'autovalore nullo è data da:
$$s_0 = \dim\ker(0 * I - (F + gK)) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} -2-c & 4 & -c \\ -1 & 2 & 0 \\ 2+c & -4 & c \end{bmatrix},$$
che vale 2 per $c = 0$. Pertanto, in corrispondenza di
$$K = [\, 2 \quad -3 \quad 0 \,],$$
$F + gK$ ha indice di nilpotenza pari a 2.

ii) **[3.5 punti]** Il requisito di avere solo modi impulsivi nell'evoluzione dell'errore di stima coincide con l'allocazione di tutti gli autovalori della matrice $F + LH$ in zero. Il calcolo della matrice di osservabilità $\mathcal{O}$ fornisce
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$
ha rango pieno: il sistema è osservabile, ed esiste uno stimatore come richiesto. Ponendo $L = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, la matrice $F + LH$ risulta:
$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & -1+a & 2a \\ 1 & -2+b & 2b \\ 0 & 1+c & 2c \end{bmatrix}.$$
Il polinomio caratteristico che si ottiene dopo alcuni calcoli è:
$$\Delta_{F+LH}(z) = z^3 + (2 - b - 2c)z^2 + (-2b - 4c - a + 1)z + (-2a - 2c),$$

che posto uguale al polinomio desiderato $p(z) = z^3$, fornisce lo stimatore richiesto

$$L = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3.

i) **[4 punti]** Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \operatorname{Im} [\, g \quad Fg \,] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\
X_3^R &= \operatorname{Im} [\, g \quad Fg \quad F^2 g \,] = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X_2^R.
\end{aligned}$$

Pertanto il sistema non è mai raggiungibile e il sottospazio $X^R = X_2^R$ ha dimensione 2.

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \{x : Fx \in \operatorname{Im} g\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -a + c \\ 4a + b - c \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : a - c = 4a + b - c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : -3a = b \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.
\end{aligned}$$

$$X_2^C = \{x : F^2 x \in \operatorname{Im} [\, g \quad Fg \,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a - c \\ 3c + b \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} = \mathbb{R}^3.$$

Pertanto il sistema (che non è mai raggiungibile) per è controllabile a zero in due passi.

ii) **[4 punti]** Osserviamo preliminarmente che il sistema (non raggiungibile) è in forma standard di raggiungibilità, per cui il calcolo della matrice di trasferimento si puo' limitare al calcolo della matrice di trasferimento del sottosistema raggiungibile

$$\Sigma_R = (F_{11}, g_1, H_1) = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Tale funzione di trasferimento risulta essere

$$W(z) = H_1 (zI_2 - F_{11})^{-1} g_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & 0 \\ -4 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2z}{(z+1)(z-1)} \\ \\ \frac{1}{z-1} \end{bmatrix}.$$

Con semplici calcoli si trova che l'uscita assegnata ha trasformata zeta

$$Y(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} \\ \\ \frac{1}{2z} \end{bmatrix}$$

ed essa è legata alla trasformata zeta del relativo segnale di ingresso dalla relazione $Y(z) = W(z)U(z)$. Pertanto, imponendo l'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} \\ \\ \frac{1}{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2z}{(z+1)(z-1)} \\ \\ \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} U(z),$$

si verifica che esiste una soluzione al problema ed essa vale

$$U(z) = \frac{z-1}{2z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z},$$

che corrisponde a

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[\delta(t) - \delta(t-1)\right].$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo E.Fornasini, G. Marchesini “Teoria dei Sistemi, Cap. 2.