COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)
COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI (IMC/IG - 6 CFU)
22 Febbraio 2011 - A.A. 2010-2011

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = ax_1(t) - x_1(t)^3 - x_1(t)x_2(t),\\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = 2x_1(t)^2 + ax_2(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determinino, al variare di a in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema;

ii) **[solo per IG e IMC 6CFU]**
si studi, al variare di a, la stabilità dell'equilibrio nell'origine per il sistema linearizzato;

iii) **[solo per IMC 9CFU]**
per $a = 0$, si studi la stabilità nell'origine (per il sistema non lineare) ricorrendo alla funzione di Lyapunov: $V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -a \\ 0 & a & -a^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \geq 0,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità del sistema, evidenziando i modi e il loro carattere;

ii) per $a = 0$: si progetti, se possibile, un controllore stabilizzante per il sistema;

iii) per $a = -1$: si progetti, se possibile, un controllore che agisca solo sul primo ingresso, tale che il sistema retroazionato risultante presenti solo i modi 1 ed e^{-t}.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,2 \quad 0 \quad 1\,]\, x(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si determini, se possibile, una sequenza di ingresso che porti il sistema da $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ a $x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$;

ii) si progetti, se possibile, uno stimatore dead-beat per il sistema.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si ricavino le equazioni del regolatore e si discuta il principio di separazione.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) **[3.5 punti]** Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ sono

$$\begin{cases} 0 &= a x_{1e} - x_{1e}^3 - x_{1e} x_{2e}, \\ 0 &= 2x_{1e}^2 + a x_{2e}, \end{cases}$$

e dalla prima equazione si ottiene $x_{1e} = 0$ o $x_{2e} = a - x_{1e}^2$.

- Sostituendo $x_{1e} = 0$ nella seconda equazione si ottiene $x_{2e} = 0$ se $a \neq 0$ oppure $\forall x_{2e} \in \mathbb{R}$ se $a = 0$.
- Sostituendo $x_{2e} = a - x_{1e}^2$ nella seconda equazione si ottiene, se $a > 2$, $x_{1e} = \pm \frac{a}{\sqrt{a-2}}$ (e di conseguenza $x_{2e} = \frac{2a}{2-a}$). Per $a \leq 2$ non c'è soluzione.

Riassumendo:

- per $a < 0$ e $0 < a \leq 2$: $\mathbf{x}_e = (0, 0)$;
- per $a = 0$: $\mathbf{x}_e = (0, x_{2e})$;
- per $a > 2$: $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_e = (\pm \frac{a}{\sqrt{a-2}}, \frac{2a}{2-a})$.

ii) **[3 punti]** Il sistema linearizzato in un intorno dell'origine (punto di equilibrio $\forall a \in \mathbb{R}$) assume la forma

$$\dot{\delta x}(t) = F \delta x(t)$$

per l'equazione di stato, dove

$$F = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e} = \left.\begin{bmatrix} a - 3x_{1e}^2 - x_{2e} & -x_{1e} \\ 4x_{1e} & a \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e},$$

che nel punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ porge

$$F = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Pertanto:

- per $a < 0$ si ha stabilità asintotica;
- per $a = 0$ si ha stabilità semplice (molteplicità geometrica unitaria per l'autovalore 0);
- per $a > 0$ si ha instabilità;

iii) **[3 punti]** Per $a = 0$ il sistema risulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)^3 - x_1(t) x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t)^2. \end{cases}$$

La funzione $V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$ risulta nulla nel punto d'equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e positiva in un suo intorno; si considera poi la funzione

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -4x_1^4,$$

che risulta semidefinita negativa.
Si ha pertanto almeno stabilità semplice nell'origine, per il criterio di stabilità di Lyapunov.

Provando ad applicare il criterio di Krasowskii, si considera l'insieme $\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) : \dot{V}(x_1, x_2) = 0\} = \{(0, x_2)\}$; se si prende $x(0) \in \mathcal{N}$, $x(0) \neq 0$, dalle equazioni della dinamica si ottiene $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, per cui l'insieme $\mathcal{N}$ contiene traiettorie perturbate, e quindi non si può concludere la stabilità asintotica.
Peraltro, al punto i) si è visto che per $a = 0$ i punti $\{(0, x_2)\}$ sono punti di equilibrio del sistema: siccome l'origine ha infiniti punti di equilibrio in ogni intorno e quindi non ci può essere stabilità asintotica, ne consegue che l'origine è punto di equilibrio semplicemente stabile.

Esercizio 2.
i) **[3.5 punti]** La matrice F ha una struttura triangolare a blocchi e i suoi autovalori sono $\sigma(F) = \{a + 1, 1 - a^2, 0\}$. Si tratta di valutare per quali valori del parametro a la matrice F ha autovalori non semplici e si ottiene:

- se $a = -1$: $a + 1 = 1 - a^2 = 0 \Rightarrow \sigma(F) = \{0, 0, 0\}$;
  la molteplicità geometrica associata all'autovalore 0 è pari a 1, ossia vi è un unico miniblocco nella forma di Jordan della matrice F; i modi risultano pertanto $m_1(t) = 1$, limitato, $m_2(t) = t$ e $m_3(t) = t^2$, divergenti; il sistema risulta instabile;

- se $a = 0$: $a + 1 = 1 - a^2 \Rightarrow \sigma(F) = \{1, 1, 0\}$;
  la molteplicità geometrica associata all'autovalore 1 è pari a 1, ossia vi è un unico miniblocco nella forma di Jordan della matrice F; i modi risultano pertanto $m_1(t) = 1$, limitato, $m_2(t) = e^t$ e $m_3(t) = te^t$, divergenti; il sistema risulta instabile;

- se $a = +1$: $1 - a^2 = 0 \Rightarrow \sigma(F) = \{0, 0, 2\}$;
  la molteplicità geometrica associata all'autovalore 0 è pari a 1, ossia vi è un unico miniblocco nella forma di Jordan della matrice F; i modi risultano pertanto $m_1(t) = 1$, limitato, $m_2(t) = t$ e $m_3(t) = e^{2t}$, divergenti; il sistema risulta instabile;

- altrimenti: $\sigma(F) = \{a + 1, 1 - a^2, 0\}$;
  gli autovalori sono distinti e i modi sono $m_1(t) = e^{(a+1)t}$, convergente per $a < -1$ (divergente altrimenti), $m_2(t) = e^{(1-a^2)t}$, convergente per $a < -1$ o $a > 1$ (divergente altrimenti), e $m_3(t) = 1$, limitato; si ha stabilità semplice per $a < -1$, instabilità altrimenti.

ii) **[4 punti]** Per $a = 0$ la matrice di stato risulta $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, che ha come spettro $\sigma(F) = \{1, 1, 0\}$. La richiesta di stabilizzabilità del sistema implica dunque la allocazione di tutti e tre gli autovalori di F.
Il calcolo della matrice di raggiungibilità porge:

$$\mathcal{R} = [\, G \quad FG \quad F^2G \,] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

che ha rango pieno; si noti invece che la matrice di raggiungibilità dal primo o dal secondo ingresso non hanno rango pieno. Pertanto, l'esistenza di un controllore stabilizzante è garantita solo considerando entrambi gli ingressi.
Ponendo

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix},$$

la matrice di stato retroazionata risulta:

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1 - k_4 & -k_5 & -k_6 \\ -1 + k_4 & 1 + k_5 & k_6 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}.$$

Cercando di dare struttura alla matrice, si può ottenere una matrice diagonale a blocchi ponendo $k_1 = k_2 = k_6 = 0$, che presenta una matrice 2x2 con due gradi di libertà (k_4 e k_5) e una matrice 1x1 con un grado di libertà (k_3): il problema risulta pertanto risolubile. Si sceglie ad esempio come polinomio caratteristico $p(s) = (s+1)^3$, da cui seguono $k_3 = -1$, $k_4 = 0$ e $k_5 = -4$, per una matrice K complessiva pari a:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii) **[4 punti]** Per $a = -1$ la matrice di stato risulta $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, che ha come spettro $\sigma(F) = \{0, 0, 0\}$.
Il calcolo della matrice di raggiungibilità dal primo ingresso, g_1, porge:

$$\mathcal{R}_1 = [\, g_1 \quad Fg_1 \quad F^2 g_1 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 2. Sicuramente $\lambda = 0$ è autovalore non raggiungibile, il che è compatibile con la richiesta del modo costante. Visto che gli altri due autovalori sono allocabili arbitrariamente, il problema ha soluzione.
Ponendo

$$K = [\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \,],$$

la matrice di stato retroazionata risulta:

$$F + g_1 K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ k_1 & -1 + k_2 & -1 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix},$$

triangolare a blocchi inferiore, con F_{11} di dimensione 1 e F_{22} di dimensione 2.
I polinomi caratteristici compatibili con le richieste del problema sono:

- $p(s) = s(s+1)^2$: la F_{22} deve avere come polinomio caratteristico $(s+1)^2$, che si ottiene per $k_2 = -3$ e $k_3 = -2$; la molteplicità geometrica dell'autovalore -1 risulta pari a 1 per ogni valore del parametro libero k_1: ne consegue che il polinomio minimo è $\psi(s) = p(s)$ e non è possibile rispettare la specifica richiesta sui modi;

- $p(s) = s^2(s+1)$: la F_{22} deve avere come polinomio caratteristico $s(s+1)$, che si ottiene per $k_2 = k_3 = -1$; la molteplicità geometrica dell'autovalore -1 risulta pari a 2 se $k_1 = 2$: in questo caso, il polinomio minimo risulta pari a $\psi(s) = s(s+1)$ e i modi del sistema sono come richiesto.

La matrice di retroazione cercata è pertanto:

$$K = [\, 2 \quad -1 \quad -1 \,],$$

Esercizio 3.
i) **[3.5 punti]** Il calcolo della matrice di raggiungibilità porge:

$$\mathcal{R} = [\, g \quad Fg \quad F^2 g \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui il sottospazio di raggiungibilità risulta essere

$$X_R = < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} > .$$

- L'equazione di aggiornamento dello stato in un passo risulta:

$$x(1) = Fx(0) + gu(0):$$

per accertare l'esistenza di un ingresso opportuno deve essere

$$x(1) - Fx(0) \in X_R,$$

con $x(1) = x_f$ e $x(0) = x_0$, che non si verifica in quanto

$$x(1) - Fx(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \notin X_R;$$

non esiste pertanto ingresso in grado di portare in un passo da x_0 a x_f;

- l'equazione di aggiornamento dello stato in due passi risulta:

$$x(2) = F^2 x(0) + [\, g \quad Fg \,] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

per accertare l'esistenza di un ingresso opportuno deve essere

$$x(2) - F^2 x(0) \in X_R,$$

con $x(2) = x_f$ e $x(0) = x_0$, e si ottiene

$$x(2) - F^2 x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in X_R;$$

pertanto esiste un ingresso in grado di portare in due passo da x_0 a x_f; tale ingresso si ottiene risolvendo l'equazione di aggiornamento di cui sopra, che porge:

$$u(1) + u(0) = -1.$$

Tra le infinite possibili, una sequenza di ingresso compatibile è quindi $u(0) = 0$ e $u(1) = -1$.

ii) **[3.5 punti]** Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 2 e lo spettro della matrice F risulta $\sigma(F) = \{0, -2, 1\}$.
Il test PBH di osservabilità evidenzia come autovalore non osservabile l'autovalore nullo, essendo

$$\text{rank} \left[\frac{0I - F}{H} \right] = 2,$$

il che garantisce l'esistenza di un osservatore DB.
Considerando lo stimatore parametrico $L = [\, a \quad b \quad c \,]^\top$, si ottiene

$$F + LH = \begin{bmatrix} 2a & 1 & a \\ 2 + 2b & -1 & b + 1 \\ 2c & 0 & c \end{bmatrix},$$

e imponendo come polinomio caratteristico $p(z) = z^3$, si ricava $L = [\, 0 \quad -3/2 \quad 1 \,]^\top$.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo E.Fornasini, G. Marchesini "Teoria dei Sistemi.