COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9CFU)
7 Settembre 2010 - A.A. 2009-2010

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato in modo tale che il sistema retroazionato abbia polinomio caratteristico $(s+2)^3$;

ii) si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato in modo tale che il sistema retroazionato abbia tutti e soli i modi e^{-3t} ed e^{-2t};

iii) si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato in modo tale che il sistema retroazionato sia non osservabile e abbia come unico autovalore del sottosistema non osservabile $\lambda = -1$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \geq 0.$$

i) Si progetti, se possibile, un controllore dead-beat dal solo primo ingresso;

ii) si progetti un controllore dead-beat che faccia uso di entrambi gli ingressi ed attribuisca alla matrice $F + GK$ del risultante sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e se ne studi stabilità asintotica e BIBO.

ii) Per ciascuno dei valori di a per cui il sistema non è BIBO stabile, si progetti un ingresso limitato che produce un'uscita forzata non limitata.
[SUGGERIMENTO: Si lavori nel dominio delle trasformate zeta, valutando i poli da attribuire alla $Y_f(z)$. È richiesto di determinare un ingresso $u(t)$ e di dimostrare la divergenza della corrispondente $y_f(t)$. Il calcolo esplicito della $y_f(t)$ non è necessario].

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore.

Teoria. Si dia la definizione di stabilità alla Lyapunov e si enuncino i criteri di stabilità di Lyapunov e di Krasowskii per un sistema a tempo continuo. Si esemplifichi il loro utilizzo, studiando la stabilità del pendolo con attrito viscoso.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] È immediato verificare che il sistema è in una specie di forma standard di raggiungibilità a rovescio, nel senso che la coppia raggiungibile è

$$(F_{22}, g_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

(la raggiungibilità di tale coppia è evidente dal fatto che si trova in forma canonica di controllo), mentre la matrice del sottosistema non raggiungibile è $F_{11} = [-2]$. Di conseguenza, è possibile attribuire alla matrice $F+gK$ del sistema retroazionato un qualsiasi polinomio multiplo di $s+2$ e quindi, in particolare, il polinomio $(s+2)^3$ richiesto dal testo. A tal fine, posto

$$K = [\, K_1 \quad K_2 \,] = [\, a \ \mid \ b \quad c \,],$$

é chiaro che per risolvere il problema è sufficiente scegliere i parametri b e c in modo tale che $\Delta_{F_{22}+g_2K_2}(s) = (s+2)^2$, mentre il parametro a è del tutto arbitrario. Poiché

$$F_{22} + g_2K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2+b & 1+c \end{bmatrix}$$

é ancora una matrice in forma compagna, è sufficiente eguagliarla alla matrice in forma compagna di polinomio caratteristico $(s+2)^2$ per ottenere il risultato desiderato. In altre parole, imponendo

$$F_{22} + g_2K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2+b & 1+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix},$$

si trova $b = -2$ e $c = -5$, da cui

$$K = [\, K_1 \quad K_2 \,] = [\, a \quad -2 \quad -5 \,], \qquad a \in \mathbb{R}.$$

ii) [4 punti] Abbiamo già evidenziato come il sistema non sia raggiungibile ed abbia come unico autovalore del sottosistema non raggiungibile -2, di molteplicità unitaria. Tale situazione è compatibile con quanto richiesto dal problema: infatti, per avere come modi esclusivamente e^{-2t} ed e^{-3t} la matrice di stato del sistema retroazionato $F+gK$ deve avere come polinomio minimo $\psi_{F+gK}(s) = (s+2)(s+3)$, che corrisponde a due possibili scelte per Δ_{F+gK} ossia $p^A_{F+gK}(s) = (s+2)(s+3)^2$ e $p^B_{F+gK}(s) = (s+2)^2(s+3)$. Utilizzando la medesima notazione adottata al punto precedente, da $\Delta_{F+gK}(s) = \Delta_{F_{11}}(s)\Delta_{F_{22}+g_2K_2}(s)$ segue che i polinomi caratteristici allocabili come $\Delta_{F_{22}+g_2K_2}(s)$ sono, rispettivamente, $p^A_1(s) = (s+3)^2$ e $p^B_1(s) = (s+2)(s+3)$. Entrambi i polinomi sono multipli di $s+2$. Ora è evidente che, posto

$$K = [\, a \quad b \quad c \,],$$

se attribuiamo ad a il valore -1 possiamo rendere la matrice $F+gK$ diagonale a blocchi ovvero del tipo

$$F + gK = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} + g_2K_2 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, la forma di Jordan di $F+gK$ sarà la somma diretta delle forme di Jordan di F_{11} e di $F_{22} + g_2K_2$, ovvero

$$J_{F+gK} = \begin{bmatrix} J_{F_{11}} & 0 \\ 0 & J_{F_{22}+g_2K_2} \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, se attribuiamo a $F_{22} + g_2K_2$ il polinomio caratteristico $p^B_1(s) = (s+2)(s+3)$, possiamo garantire che

$$J_{F+gK} = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

e quindi i modi di $F + gK$ siano esattamente i due assegnati. Anche in questo caso per determinare i valori di b e c è sufficiente imporre

$$F_{22} + g_2 K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2+b & 1+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il controllore

$$K = [\,-1 \quad -4 \quad -6\,]$$

attribuisce al risultante sistema retroazionato solo i due modi assegnati.

iii) [4 punti] Posto

$$K = [\,K_1 \quad K_2\,] = [\,a \;\mid\; b \quad c\,],$$

la matrice del sistema retroazionato risulta

$$F + gK = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1+a & -2+b & 1+c \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, la matrice di osservabilità del sistema retroazionato risulta

$$\mathcal{O}_K = \begin{bmatrix} H \\ H(F+gK) \\ H(F+gK)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1+a & -2+b & 1+c \end{bmatrix}.$$

Da ciò risulta chiaro che affinché il sistema retroazionato sia non osservabile occorre e basta che $a = -1$, unico caso in cui $\det \mathcal{O}_K = 0$. A questo punto, però, è evidente che per ogni scelta dei parametri b e c, la matrice PBH di osservabilità risulta

$$\begin{bmatrix} sI_3 - (F+gK) \\ H \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 2-b & s-1-c \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

e quindi perde rango per $s = -2$. Di conseguenza, -2 è sempre autovalore del sottosistema non osservabile e quindi il problema posto non ha soluzione.

Esercizio 2. i) [3 punti] Il calcolo della matrice di raggiungibilità dal solo primo ingresso porge:

$$\mathcal{R}_1 = [\,g_1 \quad Fg_1 \quad F^2 g_1\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

È facile quindi vedere che tale matrice ha rango 3 e quindi la coppia (F, g_1) è raggiungibile. Di conseguenza, esiste un controllore dead-beat dal solo primo ingresso per il sistema. Posto $K_1 = [\,a \quad b \quad c\,]$, si trova

$$F + g_1 K_1 = \begin{bmatrix} a & b & 1+c \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Imponendo che $\Delta_{F+g_1K_1}(z) = z^3$ ovvero che

$$\Delta_{F+g_1K_1}(z) = z^3 + (2-a)z^2 + (1-2a-b)z + (-b-1-c-a) = z^3,$$

si ottiene

$$K_1 = [\,2 \quad -3 \quad 0\,].$$

ii) [3.5 punti] Certamente il sistema è raggiungibile da entrambi gli ingressi, essendolo già dal primo ingresso, pertanto esiste un controllore dead-beat. Posto $K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$, si trova

$$F + GK = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 1+c_1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a_2 & b_2+1 & c_2-1 \end{bmatrix}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che per nessuna scelta del controllore K la matrice $F+GK$ potrebbe diventare la matrice nulla, quindi l'indice di nilpotenza non potrà mai essere unitario. Osserviamo tuttavia che scegliendo $c_1 = -1, a_2 = 0, b_2 = -1, c_2 = 1$, la matrice $F+GK$ assume la seguente struttura diagonale a blocchi

$$F + GK = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto se scegliamo a_1 e b_1 in modo tale che il primo blocco diagonale sia nilpotente, automaticamente esso (e quindi l'intera matrice $F+GK$) avrà indice di nilpotenza 2 che è il meglio che possiamo ottenere. Imponendo che il polinomio caratteristico del primo blocco diagonale sia z^2 otteniamo $a_1 = 1, b_1 = -1$ e quindi

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. i) [4 punti] La matrice F ha una struttura triangolare e i suoi autovalori sono $\sigma(F) = (a, 1-a, 1/2)$. Chiaramente si tratta di valutare per quali valori del parametro a la matrice F ha autovalori non semplici. Ciò si verifica se e solo se $a = 1/2$. Per questo valore del parametro a, infatti, i tre autovalori risultano coincidenti, mentre per tutti gli altri valori di a i tre autovalori sono distinti. Per $a = 1/2$ si trova

$$F = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che rango $(1/2I_3 - F) = 2$ e quindi la molteplicità geometrica di $1/2$ è pari a 1. Pertanto la forma di Jordan di F è

$$J = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente tale matrice è asintoticamente stabile e quindi il sistema per $a = 1/2$ è pure BIBO stabile. Per $a \neq 1/2$ i tre autovalori sono distinti e quindi la forma di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice è asintoticamente stabile se e solo se $|a| < 1$ e $|1-a| < 1$ ovvero per $0 < a < 1$.

Valutiamo ora la stabilità BIBO. La matrice di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-a & -a & 0 \\ 0 & z-1+a & -1 \\ 0 & 0 & z-\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2z-1+a}{(z-1+a)(z-a)}.$$

Va osservato che a tale risultato si può pervenire in modo rapido osservando che la coppia (F, g) è in forma standard di raggiungibilità. Ora certamente c'è BIBO stabilità se $0 < a < 1$. Si tratta allora di vedere per quali valori del parametro a possono subentrare delle cancellazioni tra numeratore e denominatore. Ora una semplificazione ha luogo se e solo se $-a = \frac{-1+a}{2}$, ovvero $a = \frac{1}{3}$, oppure $-1+a = \frac{-1+a}{2}$, ovvero $a = 1$. Il primo caso non è di interesse, dal momento che $1/3 \in]0,1[$. Il secondo caso porta a

$$W(z) = \frac{2}{z-1}$$

che chiaramente non è BIBO stabile. Quindi si ha BIBO stabilità se e solo se $0 < a < 1$.

ii) [4.5 punti] Abbiamo visto che il sistema è BIBO stabile se e solo se $0 < a < 1$. Per valori di a esterni all'intervallo (chiuso) $[0,1]$, la funzione di trasferimento del sistema $W(z)$ ha un polo reale di modulo maggiore di 1. Di conseguenza è sufficiente applicare in ingresso al sistema l'impulso discreto unitario (che nel caso discreto è un segnale limitato) per ottenere in uscita la risposta impulsiva che è un'evoluzione forzata non limitata. Quindi per $u(t) = \delta(t)$, si trova $U(z) = 1$, da cui

$$Y_f(z) = W(z) = \frac{2z - 1 + a}{(z - 1 + a)(z - a)}$$

a cui corrisponde una risposta impulsiva (con due modi distinti) del tipo

$$y_f(t) = w(t) = [A(1 - a)^t + Ba^t]\delta_{-1}(t),$$

con A e B parametri reali non nulli. Tale risposta impulsiva è illimitata giacché uno (almeno) tra $(1-a)^t$ e a^t diverge.

Consideriamo ora i casi $a = 0$ e $a = 1$ a parte. Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(z) = \frac{2z - 1}{(z - 1)z},$$

mentre per $a = 1$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(z) = \frac{2z}{(z - 1)z} = \frac{2}{z - 1}.$$

In entrambi i casi abbiamo un polo semplice in $z = 1$. È allora sufficiente introdurre tramite la $U(z)$ un secondo polo in 1 per assicurare che la $Y_f(z)$ abbia un polo doppio in 1 e quindi la corrispondente $y_f(t)$ diverga. Ciò è possibile applicando, ad esempio, il gradino unitario (discreto) che è un segnale limitato la cui trasformata zeta è

$$U(z) = \frac{z}{z - 1}.$$

In entrambi i casi la $y_f(t)$ presenterà il modo divergente $\binom{t}{1}$.

Teoria. [4.5 punti] Si veda il libro di testo E.Fornasini, G. Marchesini "Teoria dei Sistemi".