COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)
COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI (IMC/IG - 6 CFU)
13 Luglio 2010 - A.A. 2009/2010

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo discreto non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = (4x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2)x_1(t) - x_1(t)u(t), \\ x_2(t+1) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = (4x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2)x_2(t) - x_2(t)u(t), \qquad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

i) Si determinino, al variare di $\bar{u}$ in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ (con $\bar{u} \geq -1$), $t \in \mathbb{Z}$;
[Suggerimento: in alcuni casi non occorre il calcolo esplicito dei punti di equilibrio e può essere utile cercare di darne una rappresentazione grafica sul piano (x_1, x_2)];

ii) **[solo per IG e IMC 6CFU]**
per $\bar{u} = 0$, si determini il modello linearizzato del sistema in corrispondenza a ciascuno dei punti di equilibrio (generici) e se ne discuta la stabilità;

iii) **[solo per IMC 9CFU]**
per $\bar{u} = 0$ si discuta la stabilità asintotica del sistema nell'origine ricorrendo al Criterio di Lyapunov: si consideri a tale proposito la funzione $V(x_1, x_2) = \alpha(x_1 - \gamma)^2 + \beta(x_2 - \delta)^2$, per opportuni valori dei parametri $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$(da determinare).

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico di guadagno L che attribuisca alla dinamica dell'errore di stima tutti e soli i modi e^{-t} ed e^{-2t};

ii) con riferimento alla matrice $F+LH$ determinata al punto precedente, si determini l'espressione di $e(t)$, l'errore di stima al generico istante t, in funzione della generica condizione iniziale $e(0)$;

iii) si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato che renda il sistema retroazionato BIBO stabile.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si determini per quali valori di a il sistema è osservabile e/o ricostruibile.

Si ponga $a = 0$ nel seguito dell'esercizio:

ii) si progetti, se possibile, un regolatore asintotico in modo tale che la matrice del sistema complessivo (sistema di partenza più regolatore) abbia tutti gli autovalori pari a $1/2$;

iii) si determini la matrice di stato e la funzione di trasferimento del sistema complessivo (sistema di partenza più regolatore) in corrispondenza al controllore ed allo stimatore determinati al punto ii).

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Dato un sistema $\Sigma = (F, G, H)$ e il corrispondente sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$, si enuncino e si dimostrino le proposizioni sulla raggiungibilità/non raggiungibilità di Σ_K a partire dalle corrispondenti proprietà del sistema Σ.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} x_{1e} &= (4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2)x_{1e} - x_{1e}\bar{u}, \\ x_{2e} &= (4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2)x_{2e} - x_{2e}\bar{u}, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} (4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - \bar{u} - 1)x_{1e} &= 0, \\ (4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - \bar{u} - 1)x_{2e} &= 0. \end{cases}$$

Distinguiamo due casi a seconda del valore di $\bar{u}$. Se $\bar{u} = -1$, allora si ha un unico punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$. Se invece $\bar{u} \neq -1$, in aggiunta al punto di equilibrio nell'origine $\mathbf{x}_e = (0, 0)$, sono punti di equilibrio tutti i punti dell'elisse descritta dall'equazione

$$4x_1^2 + 3x_2^2 = \bar{u} + 1,$$

ellisse sul piano (x_1, x_2), centrata nell'origine e con semiassi pari rispettivamente a $\sqrt{\frac{1+\bar{u}}{4}}$ e $\sqrt{\frac{1+\bar{u}}{3}}$.

ii) [4 punti] Le equazioni del sistema non lineare sono del tipo

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ x_2(t+1) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)), \end{cases}$$

e per $u(t) = \bar{u} = 0$ tale sistema presenta come punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e il generico punto $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ che soddisfa all'equazione $4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 = 1$. Il sistema linearizzato in un intorno di un generico punto di equilibrio ad ingresso costante $\bar{u}$ assume la forma

$$\delta x(t+1) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

per l'equazione di stato, dove

$$F = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}} = \left.\begin{bmatrix} 12x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - \bar{u} & 6x_{1e}x_{2e} \\ 8x_{1e}x_{2e} & 4x_{1e}^2 + 9x_{2e}^2 - \bar{u} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}};$$

$$G = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}} = \left.\begin{bmatrix} -x_{1e} \\ -x_{2e} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}}.$$

Pertanto nel punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ per $\bar{u} = 0$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mentre nel generico punto di equilibrio sull'elisse abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 8x_{1e}^2 + 1 & 6x_{1e}x_{2e} \\ 8x_{1e}x_{2e} & 6x_{2e}^2 + 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} -x_{1e} \\ -x_{2e} \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda lo studio della stabilità si vede che l'origine è asintoticamente stabile (la matrice F presenta in questo caso due autovalori in zero), mentre il sistema linearizzato attorno al generico punto dell'elisse risulta instabile. Infatti in questo caso il polinomio caratteristico relativo alla matrice F risulta pari a:

$$\begin{aligned} \Delta_F(z) &= (z - 8x_{1e}^2 - 1)(z - 6x_{2e}^2 - 1) - 48x_{1e}^2x_{2e}^2 \\ &= z^2 + z(-8x_{1e}^2 - 6x_{2e}^2 - 2) + (48x_{1e}^2x_{2e}^2 + 8x_{1e}^2 + 6x_{2e}^2 + 1 - 48x_{1e}^2x_{2e}^2) \\ &= z^2 + z(-2(4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - 1) - 4) + (2(4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - 1) + 3) \\ &= z^2 - 4z + 3 \end{aligned}$$

che presenta due autovalori costanti e pari a 1 e 3 (e quest'ultimo autovalore indica instabilità).

iii) [4 punti] La funzione $V(x_1, x_2) = \alpha(x_1 - \gamma)^2 + \beta(x_2 - \delta)^2$ deve risultare nulla nel punto d'equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e positiva in un suo intorno, pertanto una buona scelta di parametri risulta essere: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma = \delta = 0$. Considerando poi la funzione

$$\Delta V(x_1, x_2) = V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t)),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= \alpha x_1(t+1)^2 + \beta x_2(t+1)^2 - \alpha x_1(t)^2 - \beta x_2(t)^2 \\ &= \alpha\left((4x_1^2 + 3x_2^2)x_1\right)^2 + \beta\left((4x_1^2 + 3x_2^2)x_2\right)^2 - \alpha x_1(t)^2 - \beta x_2(t)^2 \\ &= \left(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2\right)\left((4x_1^2 + 3x_2^2)^2 - 1\right), \end{aligned}$$

il cui primo fattore è positivo. Il secondo fattore risulta negativo per tutti i punti interni all'ellisse $4x_1^2 + 3x_2^2 = 1$, che corrispondono a un intorno di $\mathbf{x}_e$. ΔV risulta definita negativa e pertanto l'origine risulta punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 2. i) [3.5 punti] È immediato verificare che il sistema si trova in forma standard di osservabilità, dal momento che la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

è osservabile, e la matrice F_{22} del sottosistema non osservabile è pari a $F_{22} = [-1]$. Pertanto è possibile allocare come polinomio caratteristico della matrice $F{+}LH$ tutti e soli i polinomi multipli di $\Delta_{F_{22}}(s) = s{+}1$. Ora la richiesta sui modi di $F{+}LH$ corrisponde alla richiesta di attribuire come polinomio minimo di $F{+}LH$ il polinomio $\psi_{F+LH}(s) = (s{+}1)(s{+}2)$. Tale polinomio minimo è compatibile con due polinomi caratteristici, entrambi allocabili: $\Delta_{F+LH}(s) = (s+1)^2(s+2)$

e $\Delta_{F+LH}(s) = (s+1)(s+2)^2$. Ora, se attribuisco alla matrice L la struttura parametrica $L = [\,a \quad b \quad c\,]^\top$, la matrice $F + LH$ diventa

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2+a & 0 \\ 1 & 1+b & 0 \\ 0 & 1+c & -1 \end{bmatrix}$$

ed è immediato vedere che attribuendo a c il valore -1 la matrice diventa diagonale a blocchi, ovvero

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2+a & 0 \\ 1 & 1+b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + L_1 H_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se allora attribuiamo alla matrice $F_{11} + L_1 H_1$ il polinomio caratteristico $(s+1)(s+2)$, per la struttura diagonale a blocchi di $F + LH$ saremo certi che la forma di Jordan di $F + LH$ sia

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi che la matrice abbia esattamente i modi desiderati. Imponiamo, quindi,

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(s) = s^2 - (1+b)s - (2+a) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2,$$

ottenendo $a = b = -4$. Si ha, in tal modo, $L = [\,-4 \quad -4 \quad -1\,]^\top$.

ii) [3 punti] La matrice $F + LH$ determinata al punto precedente è pari a

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e la sua forma di Jordan è pari a

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ciò significa che la matrice T di cambio base sarà del tipo

$$T = [\,v_1 \quad v_2 \quad v_3\,],$$

con v_1 autovettore relativo a -2 e v_2 e v_3 due autovettori linearmente indipendenti relativi a -1. In realtà il conto può essere significativamente semplificato, tenendo conto del fatto che $F + LH$ è diagonale a blocchi e quindi come matrice T possiamo scegliere

$$T = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove w_1 e w_2 sono due autovettori in $\mathbb{R}^2$ di $F_{11} + L_1 H_1$ relativi, rispettivamente, a -2 e -1. Si trova $w_1 = [\,1 \quad 1\,]^\top$, $w_2 = [\,2 \quad 1\,]^\top$, da cui

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} e^{Ft} &= Te^{Jt}T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$e(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} e(0) = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t})e_1(0) + 2(e^{-2t} - e^{-t})e_2(0) \\ (e^{-t} - e^{-2t})e_1(0) + (2e^{-2t} - e^{-t})e_2(0) \\ e^{-t}e_3(0) \end{bmatrix}.$$

iii) [3 punti] Calcoliamo dapprima la matrice di raggiungibilità del sistema, che risulta:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ed ha rango pieno. Pertanto, essendo il sistema raggiungibile, possiamo rendere il sistema retroazionato asintoticamente stabile e quindi, a maggior ragione, BIBO stabile. Assumendo per K la forma parametrica $K = [\,a \quad b \quad c\,]$, la matrice $F + GK$ risulta

$$F + GK = \begin{bmatrix} -a & 2-b & -c \\ 1+a & 1+b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

che per $c = 0$ risulta triangolare a blocchi inferiore. Il polinomio caratteristico diventa $\Delta_{F+GK}(s) = (s+1)[(s+a)(s-1-b) - 2 + ab - 2a + b] = (s+1)(s^2 + (a-b-1)s + (-3a+b-2)$. Applicando Cartesio al polinomio di secondo grado possiamo dire che il polinomio risultante è di Hurwitz se e solo se $a - b - 1 > 0$ e $-3a + b - 2 > 0$. Imponendo, ad esempio, $\Delta_{F+GK}(s) = (s+1)^3$, si ottiene $a - b - 1 = 2$ e $-3a + b - 2 = 1$, da cui $a = -3$ e $b = -6$. La matrice di retroazione risulta in questo caso $K = [-3 \ \ -6 \ \ 0]$.

Esercizio 3. i) [2 punti] Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -a \end{bmatrix}.$$

È facile quindi vedere che tale matrice ha rango 3 per ogni $a \neq 0$. Quindi per $a = 0$ non è osservabile, mentre per tutti gli altri valori di a lo è. Certamente se è osservabile è pure ricostruibile. Verichiamo ora se il sistema è ricostruibile per $a = 0$. Per tale valore del parametro a la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

e non ha autovalori nulli, quindi certamente l'unico autovalore del sottosistema non osservabile non può essere nullo. Pertanto per $a = 0$ il sistema non è nemmeno ricostruibile.

ii) [4.5 punti] È facile verificare che per $a = 0$ la coppia (F, H) è in forma standard di osservabilità, giacché la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, [\,1 \quad 0\,] \right)$$

è osservabile, e la matrice del sottosistema non osservabile è pari a $F_{22} = [1/2]$. Esiste pertanto uno stimatore asintotico che attribuisce come polinomio caratteristico di $F + LH$ il polinomio $\Delta_{F+LH}(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^3$.

Posto $L = [\, L_1^\top \;\mid\; L_2^\top \,]^\top = [\, a \quad b \;\mid\; c \,]^\top$ si trova

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1+a & -1 & 0 \\ 2+b & 0 & 0 \\ c+1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Imponendo che $\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2$ ovvero che

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z) = (z - 1 - a)z + (2 + b) = z^2 - (1 + a)z + (2 + b) = z^2 - z + \frac{1}{4},$$

si ottiene

$$L = [\,0 \quad -\tfrac{7}{4} \quad c\,]^\top,$$

con c parametro arbitrario in $\mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la parte di controllo, è immediato verificare che la coppia (F, G) è raggiungibile e quindi certamente esiste un controllore K che attribuisce come polinomio caratteristico di $F + GK$ il polinomio $\Delta_{F+GK}(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^3$. Posto

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

si trova

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1+a_2 & -1+b_2 & c_2 \\ 2+a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

la soluzione più semplice consiste nell'eguagliare la precedente matrice parametrica alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene in tal modo

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii) [3 punti] Ricordiamo che la matrice del sistema complessivo, nell'ipotesi di assumere come vettore di stato $[\, x(t)^\top \quad e(t)^\top \,]^\top$, è data da

$$F_{\rm tot} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Per quanto concerne la funzione di trasferimento, ci ricordiamo dalla teoria che essa coincide con quella del sistema retroazionato $\Sigma_K = (F+GK, G, H)$. Si trova, pertanto,

$$W_{\rm tot}(z) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} z-1/2 & 0 & 0 \\ 0 & z-1/2 & 0 \\ -1 & 0 & z-1/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z-1/2} \end{bmatrix}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.