COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)
COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI (IMC/IG - 6 CFU)
28 Gennaio 2010 - A.A. 2009/2010

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_2(t) + \beta\left(\frac{x_1^3(t)}{3} - x_1(t)\right) + x_1^2(t)u(t),\\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = -x_1(t) + x_1^2(t)u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+ \quad \beta \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

i) Si determinino, al variare di $\bar{u}$ in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}, t \in \mathbb{R}_+$;

ii) per $\bar{u} = 1$, si determini il modello linearizzato del sistema in corrispondenza a ciascuno dei punti di equilibrio (generici).

iii) ***Solo per studenti IMC-9CFU***
per $\bar{u} = 0$, si discuta, al variare del parametro β in $\mathbb{R}$, la stabilità nell'origine del sistema non lineare ricorrendo al metodo di linearizzazione.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t),\\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,\end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si calcolino, al variare di a in $\mathbb{R}$, i sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità in k passi per ogni $k \in \mathbb{N}$.

ii) ***Solo per studenti IMC/IG-6CFU***
Per ogni valore di $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, si dica se esiste un ingresso di controllo che porta lo stato del sistema da $x(0) = [\,0 \quad 1 \quad 0\,]^T$ a $x(2) = [\,0 \quad 1 \quad a\,]^T$ e, in caso affermativo lo si calcoli esplicitamente.

iii) Per $a = 0$ si calcoli, se possibile, un ingresso impulsivo collocato in 0 (ovvero un ingresso identicamente nullo all'infuori dell'istante $t = 0$ dove varrà un opportuno $u(0)$) in modo tale che l'uscita forzata corrispondente valga sempre 2 da $t = 1$ in poi.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 1\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, un controllore deadbeat K;

ii) si progetti, se possibile, uno stimatore il cui errore di stima presenti come modi $\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^t, \delta(t), \left(\frac{1}{2}\right)^t \right\}$.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si dimostri che un generico modello di stato $\Sigma = (F, G, H)$ di dimensione n e non raggiungibile è algebricamente equivalente ad un modello di stato in forma standard di raggiungibilità.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3.5 punti] Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} 0 &= x_{2e} + \beta \left(\dfrac{x_{1e}^3}{3} - x_{1e} \right) + x_{1e}^2 \bar{u}, \\ \\ 0 &= -x_{1e} + x_{1e}^2 \bar{u}. \end{cases}$$

Analizziamo la seconda equazione.
Se $\bar{u} = 0$, la seconda equazione fornisce l'unica soluzione $x_{1e} = 0$, che sostituita nella prima equazione porge $x_{2e} = 0$. Si ha quindi un unico punto d'equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$.
Se invece $\bar{u} \neq 0$, la seconda equazione è soddisfatta sia per $x_{1e} = 0$ sia per $x_{1e} = \frac{1}{\bar{u}}$. Sostituendo nella prima equazione, si trovano le due soluzioni corrispondenti $x_{2e} = 0$ e $x_{2e} = -\beta \left(\frac{1}{3\bar{u}^3} - \frac{1}{\bar{u}} \right) - \frac{1}{\bar{u}}$. Si hanno quindi due punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_e = (\frac{1}{\bar{u}}, -\beta \left(\frac{1}{3\bar{u}^3} - \frac{1}{\bar{u}} \right) - \frac{1}{\bar{u}})$.

ii) [3.5 punti] Le equazioni del sistema non lineare sono del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)), \end{cases}$$

e per $u(t) = \bar{u} = 1$ tale sistema presenta come punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_e = (\frac{1}{\bar{u}}, -\beta \left(\frac{1}{3\bar{u}^3} - \frac{1}{\bar{u}} \right) - \frac{1}{\bar{u}}) = (1, 2\beta/3 - 1)$. Il sistema linearizzato in un intorno di ciascuno dei precedenti punti assume la forma

$$\delta \dot{x}(t) = F \delta x(t) + G \delta u(t)$$

dove

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \begin{bmatrix} \beta \left(x_{1e}^2 - 1 \right) + 2x_{1e}\bar{u} & 1 \\ -1 + 2x_{1e}\bar{u} & 0 \end{bmatrix} \Bigg|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \begin{bmatrix} \beta \left(x_{1e}^2 - 1 \right) + 2x_{1e} & 1 \\ -1 + 2x_{1e} & 0 \end{bmatrix} \Bigg|_{\mathbf{x}_e};$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \begin{bmatrix} x_{1e}^2 \\ x_{1e}^2 \end{bmatrix} \Bigg|_{\mathbf{x}_e}.$$

Pertanto nel punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mentre nel punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (1, 2\beta/3 - 1)$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

iii) [3.5 punti] In corrispondenza all'ingresso nullo, la matrice jacobiana del sistema linearizzato attorno a $\mathbf{x}_e = (0,0)$ risulta

$$F = \begin{bmatrix} \beta\left(x_{1e}^2 - 1\right) & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}_e=(0,0)} = \begin{bmatrix} -\beta & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è pari a

$$\Delta_F(s) = s^2 + \beta s + 1.$$

Per il criterio di Cartesio, gli autovalori della matrice sono entrambi a parte reale positiva per $\beta < 0$ ed entrambi a parte reale negativa per $\beta > 0$. L'origine è pertanto punto di equilibrio asintoticamente stabile per $\beta > 0$ e instabile per $\beta < 0$. Per $\beta = 0$ il sistema non lineare coincide con il sistema linearizzato e presenta la coppia di autovalori immaginari coniugati ($\pm j$); pertanto il sistema risulta semplicemente stabile.

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$X_1^R = \mathrm{Im}G = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Il sottospazio di raggiungibilità in due passi è

$$X_2^R = \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{cases} \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = X_1^R, & \text{se } a = 0; \\ \mathbb{R}^3, & \text{se } a \neq 0. \end{cases}$$

Chiaramente $X_k^R = X_2^R$ per ogni $k > 2$. Pertanto, se $a \neq 0$ il sistema è raggiungibile e lo è in 2 passi. Se $a = 0$ il sistema non è raggiungibile e il sottospazio di raggiungibilità coincide con $X_1^R = \mathrm{Im}G$. Valutiamo, ora, i sottospazi di controllabilità. Il sottospazio di controllabilità in un passo è:

$$\begin{aligned} X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im}G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ a(x_2 + x_3) \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\ &= \begin{cases} \mathbb{R}^3, & \text{se } a = 0; \\ \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_2 = -x_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle, & \text{se } a \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Per quanto concerne il sottospazio di controllabilità in due passi, il suo calcolo ha senso solo per $a \neq 0$ e in tal caso troviamo

$$X_2^C = \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3,$$

e quindi per $a \neq 0$ il sistema è controllabile a zero in due passi. Chiaramente $X_k^C = X_2^C$ per ogni $k > 2$.

ii) [3.5 punti] Per $a \neq 0$ il sistema è raggiungibile in due passi, ovvero $X_2^R = \mathbb{R}^3$, e pertanto è certamente vero che

$$x(2) - F^2 x(0) \in X_2^R.$$

Ciò assicura la risolubilità del problema. L'equazione da risolvere nella pratica è:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -a^2 \end{bmatrix} = x(2) - F^2 x(0) \quad = \quad [\,G \quad FG\,] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}.$$

Assumendo, ad esempio, $u_1(0) = 0$ otteniamo il sistema determinato

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_2(0) \end{bmatrix},$$

la cui soluzione è $u_2(0) = u_2(1) = -a$ e $u_1(1) = 2a$.

iii) [3.5 punti] Per $a = 0$ la matrice del sistema è

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

È facile vedere che se $x(1) = [0 \quad 2 \quad 0]^T$, allora $x(t) = x(1)$ per ogni $t \geq 1$, come pure $y_f(t) = y_f(1) = 2$ per ogni $t \geq 1$. È allora sufficiente verificare se è possibile trovare un ingresso $u(0)$ in modo tale che lo stato del sistema passi da $x(0) = 0$ a $x(1) = [0 \quad 2 \quad 0]^T$. Poiché $x(1) \in X_1^R = \mathrm{Im}G$, ciò è certamente possibile. Imponendo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = x(1) = Gu(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix},$$

si trova $u_2(0) = 2 = -u_1(0)$.

Esercizio 3. i) [4 punti] Il sistema presenta una struttura delle matrici (F, g) compatibile con la forma standard di raggiungibilità:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con

$$(F_{11}, g_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Poiché, però, la coppia (F_{11}, g_1) risulta non raggiungibile, il sistema non è in forma standard di raggiungibilità. Infatti, la matrice di raggiungibilità di (F, g)

$$\mathcal{R} = [g|Fg|F^2g] = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 2 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 1, che corrisponde alla dimensione del sottosistema raggiungibile.

Lo spettro della matrice F è $\sigma_F = \{0, 0, 3\}$ e dal test PBH si evince che l'autovalore del sottositema raggiungibile è 3 dal momento che

$$\text{rank}(PBH_3) = \text{rank} \begin{bmatrix} z-1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & z-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{bmatrix}_{z=3} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Di conseguenza i due autovalori del sottosistema non raggiungibile sono i due autovalori nulli e infatti si trova

$$\text{rank}(PBH_0) = \text{rank} \begin{bmatrix} z-1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & z-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{bmatrix}_{z=0} = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Pertanto, sulla base delle considerazioni appena fatte sugli autovalori del sottosistema non raggiungibile, possiamo dire che esiste un controllore deadbeat.

Per la determinazione del controllore, si procede considerando una generica K parametrica $K = [\,a \quad b \quad c\,]$, da cui si ottiene

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1-a & -1-b & -c \\ -2+2a & 2+2b & 1+2c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

matrice triangolare a blocchi che presenta il seguente polinomio caratteristico

$$\Delta_{F+gK}(z) = z \cdot \det \begin{bmatrix} z-(1-a) & 1+b \\ 2-2a & z-(2+2b) \end{bmatrix} = z \cdot \left[z^2 + (a-2b-3)\,z\right].$$

Affinchè K sia un controllore deadbeat, il polinomio caratteristico della matrice retroazionata $F + gK$ deve essere pari a $p(z) = z^3$, il che si traduce nella condizione

$$a - 2b - 3 = 0.$$

Segue che il controllore cercato ha la seguente struttura

$$K = [\,2b+3 \quad b \quad c\,],$$

con b e c arbitrari.

ii) [3.5 punti] Studiamo dapprima l'osservabilità del sistema, per capire l'allocabilità degli autovalori di $F + LH$. Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix},$$

il cui rango è pari a 3. La coppia (F, H) è pertanto completamente osservabile ed è quindi possibile attribuire alla matrice $F + LH$ un'arbitraria terna di autovalori.

La specifica richiesta equivale a chiedere che il polinomio caratteristico di $(F + LH)$ sia pari a:

$$p(z) = z\left(z^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Scegliamo una matrice L parametrica, $L = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, e calcoliamo la generica matrice $F + LH$:

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1+a & -1 & a \\ -2+b & 2 & 1+b \\ c & 0 & c \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è dato dalla seguente espressione:

$$\Delta_{F+LH}(z) = z^3 + (-3 - a - c)\ z^2 + (2a + b + 3c)\ z + c.$$

Eguagliando i coefficienti di $\Delta_{F+LH}(z)$ a quelli del polinomio desiderato $p(z)$, si ottiene lo stimatore richiesto

$$L = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{23}{4} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.