COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)
COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI (IMC/IG - 6 CFU)
15 Febbraio 2010 - A.A. 2009/2010

Esercizio 1. Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= F\mathbf{x}(t) + gu(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a-1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= H\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad\qquad t \in \mathbb{R}_+,\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema.

ii) [**Solo per IG e IMC 6CFU**] Per $a = 0$, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, si determini, se possibile, un'evoluzione di ingresso che produce un'evoluzione forzata di uscita di tipo puramente sinusoidale (i.e., $y_f(t) = A\sin(\omega t)$ per qualche A e per qualche ω) e un'evoluzione di ingresso che produce un'evoluzione forzata di uscita di tipo puramente cosinusoidale ($y_f(t) = B\cos(\tilde{\omega} t)$ per qualche B e per qualche $\tilde{\omega}$).

iii) [**Solo per IMC 9CFU**] Per $a = 1/2$, studiare la stabilità asintotica del sistema ricorrendo all'equazione di Lyapunov per sistemi continui.

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

i) Si determini la forma di Jordan F_J della matrice F.

ii) Si determini il numero minimo di colonne m di cui una matrice G_J deve essere dotata affinché la coppia (F_J, G_J) risulti raggiungibile e si determini esplicitamente una matrice G_J di m colonne per cui la coppia (F_J, G_J) risulti raggiungibile.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + [\, g_1 \quad g_2 \,]\, u(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\, a \quad 1 \quad 0 \,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si progetti, se possibile, un ingresso di controllo agente sul solo primo ingresso g_1 che porti il sistema dallo stato iniziale $x_0 = [-1 \quad 1 \quad 1]^\top$ allo stato finale $x_f = [-1 \quad -1 \quad -1]^\top$ nel numero minimo di passi;

ii) si progetti, se possibile, un controllore in retroazione dal solo secondo ingresso g_2 tale che il sistema risultante retroazionato presenti due modi distinti relativi a uno stesso autovalore e nessun altro modo;

iii) si studi l'osservabilità del sistema al variare del parametro reale a e, se possibile, si determini la famiglia di stimatori dead-beat.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si enunci e dimostri il teorema della forma canonica di controllo per sistemi raggiungibili ad un solo ingresso.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4.5 punti] (* forse troppi ... *) La matrice F è triangolare a blocchi, per cui il suo polinomio caratteristico, $\Delta_F(s)$, è ottenibile nella forma fattorizzata

$$\Delta_F(s) = (s^2 + as + 1 - a)(s + 1).$$

Il fattore $s+1$ individua uno zero in -1 che non crea problemi ai fini della stabilità asintotica (e quindi BIBO). Applicando la regola dei segni di Cartesio al fattore di secondo grado, $s^2+as+1-a$, possiamo dire che esso ha entrambe le radici a parte reale negativa (e quindi il sistema risulta asintoticamente stabile) se e solo se $a > 0$ e $1-a > 0$, ovvero $0 < a < 1$. Per valori di a inferiori a 0 o superiori ad 1 certamente il polinomio ha almeno una radice a parte reale positiva e quindi il sistema risulta instabile.

Analizziamo la possibilità di stabilità semplice per i valori $a = 0$ e $a = 1$. Per $a = 0$ il polinomio caratteristico diventa $\Delta_F(s) = (s^2 + 1)(s + 1)$ e quindi si ha stabilità semplice (due autovalori distinti sull'asse immaginario e uno reale negativo); per $a = 1$ il polinomio caratteristico diventa $\Delta_F(s) = (s^2+s)(s+1) = s(s+1)^2$ e quindi si ha ancora stabilità semplice (un autovalore nullo e un autovalore reale negativo di molteplicità due).

Valutiamo ora, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità BIBO del sistema. Chiaramente c'è stabilità BIBO per tutti i valori del parametro a per cui c'è stabilità asintotica, ovvero per $0 < a < 1$. Calcoliamo la funzione di trasferimento del sistema. Si trova

$$\begin{aligned} W(s) &= H(sI-F)^{-1}g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -a+1 & s+a & 0 \\ -1 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s(s+2)}{(s+1)(s^2+as+1-a)}, \end{aligned}$$

che ha uno zero stabile ed uno al limite della regione di stabilità, collocato in 0. Pertanto si ha stabilità BIBO senza avere stabilità asintotica se e solo se il polinomio al denominatore si annulla in 0, ovvero

$$0 = s^2 + as + 1 - a\big|_{s=0} = 1 - a,$$

ovvero $a = 1$. Per tale valore del parametro la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

ed ha solo poli stabili. Si ha stabilità BIBO, quindi, se e solo se $0 < a \leq 1$.

ii) [4 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa $W(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s^2+1)}$. Il modo più semplice per pervenire alle soluzioni desiderate consiste nell'effettuare delle cancellazioni, attraverso un'opportuna $U(s)$, in modo tale che in un caso

$$Y(s) = Y_f(s) = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[\sin t]$$

e nell'altro

$$Y(s) = Y_f(s) = \frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}[\cos t].$$

Per il primo caso occorre scegliere

$$U(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2},$$

che corrisponde a

$$u(t) = 1/2[1 + e^{-2t}]\delta_{-1}(t),$$

nell'altro caso occorre scegliere

$$U(s) = \frac{s+1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2},$$

che corrisponde a

$$u(t) = \delta(t) - e^{-2t}\delta_{-1}(t).$$

iii) [4 punti] Per $a = 1/2$ la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dalla teoria sappiamo che si ha stabilità asintotica se e solo se per ogni scelta di $Q = Q^\top > 0$ esiste un'unica matrice $P = P^\top > 0$ soluzione della equazione di Lyapunov per sistemi continui:

$$F^\top P + PF = -Q.$$

Scegliamo $Q = I$ e consideriamo una matrice simmetrica parametrica

$$P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}.$$

Dal calcolo esplicito della equazione di Lyapunov

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -b + 2c = -1 \\ 2b - d = -1 \\ -2f = -1 \\ -d + 2e + 2a - b = 0 \\ -e + 2f - 2c = 0 \\ 2c - 3e = 0 \end{cases},$$

che fornisce la soluzione (unica)

$$P = \begin{bmatrix} 23/8 & 7/4 & 3/8 \\ 7/4 & 9/2 & 1/4 \\ 3/8 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Rimane ora da verificare che sia $P > 0$. Si ricorre al test di Sylvester e si ottiene:

$$|P_{11}| = \frac{23}{8} > 0;$$

$$|P_{22}| = \frac{23}{8} * \frac{9}{2} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 > 0;$$

$$|P| = \frac{23}{8} * \frac{9}{2} * \frac{1}{2} + \frac{7}{4} * \frac{1}{4} * \frac{3}{8} + \frac{3}{8} * \frac{7}{4} * \frac{1}{4} - \frac{3}{8} * \frac{9}{2} * \frac{3}{8} - \frac{1}{4} * \frac{1}{4} * \frac{23}{8} - \frac{1}{2} * \frac{7}{4} * \frac{7}{4} > 0.$$

Pertanto l'unica $P = P^\top$ è definita positiva e il sistema risulta asintoticamente stabile.

Esercizio 2. i) [2 punti] Gli autovalori della matrice F si ottengono facilmente, vista la struttura triangolare della matrice:

$$\lambda_1 = 1 \qquad n_1 = 3;$$

$$\lambda_2 = 2 \qquad n_2 = 2.$$

Si procede al calcolo della molteplicità geometrica, ottenendo:

$$\begin{aligned} s_1 &= \dim\ker(1I - F) = 5 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3, \\ s_2 &= \dim\ker(2I - F) = 5 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Vi sono pertanto $s_1 = 3$ miniblocchi di Jordan associati all'autovalore $\lambda_1 = 1$ e $s_2 = 1$ miniblocco di Jordan associato all'autovalore $\lambda_2 = 2$. La forma di Jordan ordinata risultante è:

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

ii) [2 punti] Per il criterio PBH di raggiungibilità nel caso di matrice di stato in forma di Jordan, risulta necessario che il numero minimo di ingressi m sia pari alla massima molteplicità

geometrica degli autovalori di F_J, in tal caso $m = 3$.
Per garantire la raggiungibilità della coppia (F_J, G_J), la matrice G_J deve presentare, per ogni autovalore λ, righe indipendenti in corrispondenza delle ultime righe dei miniblocchi di F_J. Una possibile scelta di G_J risulta essere:

$$G_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. i) [3.5 punti] La matrice di raggiungibilità della coppia (F, g_1) risulta:

$$\mathcal{R}_1 = [\, g_1 \quad Fg_1 \quad F^2 g_1 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

che ha rango pieno. La coppia risulta pertanto raggiungibile e il problema ha sicuramente soluzione in al più $n = 3$ passi.

Ricordando che

$$x(k) = F^k x(0) + \mathcal{R}_k \mathcal{U}_k,$$

dove $\mathcal{U}_k = [\, u_1(k-1) \quad \dots \quad u_1(1) \quad u_1(0) \,]^\top$, verifichiamo che non è possibile soddisfare alla richiesta in un solo passo, dal momento che

$$x(1) - Fx(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \notin < \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} > .$$

In due passi, si ottiene:

$$x(2) - F^2 x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \in < \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} >,$$

per cui il problema ha soluzione per $k = 2$. Tale soluzione si trova risolvendo il sistema:

$$x(2) - F^2 x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_1(0) \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene:

$$u_1(0) = -1 \qquad u_1(1) = -3.$$

ii) [4 punti] La matrice di raggiungibilità della coppia (F, g_2) risulta:

$$\mathcal{R}_2 = [\, g_2 \quad Fg_2 \quad F^2 g_2 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 2. La coppia risulta pertanto non raggiungibile.

Attraverso il test PBH si verifica che l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile è $\lambda = -1$, da cui segue che, per rispettare le specifiche del problema, è necessario e sufficiente che il sistema retroazionato presenti come polinomio caratteristico $p(z) = (z+1)^3$ e come polinomio minimo $(z+1)^2$.

Attribuiamo alla matrice K una struttura parametrica, $K = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]$, e valutiamo la generica matrice $F + g_2 K$:

$$F + g_2 K = \begin{bmatrix} 2+\alpha & \beta & 1+\gamma \\ 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \beta & 2+\gamma \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è dato dalla seguente espressione:

$$\Delta_{F+g_2K}(z) = (z+1)\left(z^2 + (-4-\alpha-\gamma)\ z + (4+\alpha+2\gamma)\right).$$

Eguagliando i coefficienti di $\Delta_{F+g_2K}(z)$ a quelli del polinomio desiderato $p(z)$ si ottiene

$$K = [\,-9 \quad \beta \quad 3\,],$$

da cui si ricava:

$$F + g_2 K = \begin{bmatrix} -7 & \beta & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -9 & \beta & 5 \end{bmatrix}.$$

Per verificare il soddisfacimento del vincolo sul polinomio minimo, bisogna ora studiare la molteplicità geometrica di $\lambda = -1$. Si trova che

$$s_{\lambda=-1} = \dim\ker(-I - (F + g_2K)) = 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 6 & -\beta & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -\beta & -6 \end{bmatrix},$$

che vale 1 se $\beta \neq 0$ e 2 se $\beta = 0$. In quest'ultimo caso si hanno due miniblocchi relativi a $\lambda = -1$ e polinomio minimo $\psi_{F+g_2K}(z) = (z+1)^2$. Il controllore richiesto risulta pertanto:

$$K = [\,-9 \quad 0 \quad 3\,].$$

iii) [5 punti] Studiamo dapprima l'osservabilità del sistema. Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 2a & -1 & a \\ 4a & 1 & 4a \end{bmatrix},$$

il cui determinante vale $\Delta = -9a^2$.

Se $a = 0$ il rango di $\mathcal{O}$ è pari a 1, per cui il sistema risulta non osservabile con autovalori del sottosistema non osservabile non nulli (in quanto la matrice F ha tutti gli autovalori diversi da 0). Pertanto in tal caso non esiste stimatore dead beat.

Se $a \neq 0$ il rango di $\mathcal{O}$ è pari a 3, il sistema risulta osservabile e ammette l'esistenza di un osservatore dead beat.

Scegliamo una matrice L parametrica, $L = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$, e calcoliamo la generica matrice $F + LH$:

$$F + LH = \begin{bmatrix} 2 + a\alpha & \alpha & 1 \\ a\beta & -1 + \beta & 0 \\ a\gamma & \gamma & 2 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è dato dalla seguente espressione:

$$\Delta_{F+LH}(z) = z^3 + (-3 - a\alpha - \beta)\ z^2 + (-a\gamma + a\alpha + 4\beta)\ z + (-a\gamma + 2a\alpha - 4\beta + 4).$$

Eguagliando i coefficienti di $\Delta_{F+LH}(z)$ a quelli del polinomio desiderato $p(z) = z^3$, si ottiene lo stimatore richiesto

$$L = \begin{bmatrix} -28/9a \\ 1/9 \\ -24/9a \end{bmatrix}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione.