COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
14 Settembre 2009

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1+a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]\, x(t), \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si determini, se esistono, i valori del parametro a per cui il sistema assegnato è un filtro FIR, ovvero presenta risposta impulsiva finita.

ii) Al variare di a in $\mathbb{R}$, si calcolino esplicitamente i sottospazi di controllabilità in k passi per ogni $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si determini per quali valori di a il sistema ammette un controllore dead-beat, e

iv) per tali valori si determini, al variare di a e se possibile, la famiglia dei controllori dead-beat che rendono la matrice $F + gK$ del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo.

Esercizio 2. Si consideri un sistema dinamico lineare a tempo discreto SISO $\Sigma = (F, g, H)$. Supponendo che in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2a^{k-1} & k \geq 1 \end{cases}$$

a parametro reale, il sistema risponda, in sola evoluzione forzata, con il segnale di uscita

$$y(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 1 \\ -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} & k \geq 2 \end{cases}$$

Si determini per quali valori di a posso dire che il sistema Σ è BIBO stabile.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare continuo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= F\mathbf{x}(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ \mathbf{y}(t) &= H\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

i) si progetti, se possibile, uno stimatore L_1 che agisce solo sulla prima uscita tale che tutti i modi dell'errore di stima siano convergenti e tutti relativi ad un medesimo autovalore reale λ;

ii) dato lo stimatore L_2 che agisce solo sulla prima uscita, $L_2 = [\,2 \quad -2 \quad 0\,]^T$, si calcoli l'evoluzione dell'errore di stima $e(t)$ a partire dalla condizione iniziale $e_0 = [\,3 \quad 1 \quad 1\,]^T$;

iii) si progetti, se possibile, uno stimatore L che agisca su una od entrambe le uscite in modo tale che i modi dell'errore di stima siano solo $m_1(t) = e^{-2t}$ e $m_2(t) = e^{-3t}$.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si dimostri che un sistema $\Sigma = (F, G, H)$, di dimensione n, è raggiungibile se e solo se la matrice $[\,zI_n - F \quad | \quad G\,]$ ha rango n per ogni $z \in \mathbb{C}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \frac{2}{z^2 - (2+a)z + (a-3)}$$

e per nessun valore di a presenta tutti i poli nell'origine.

ii) [3.5 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im} G = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \\
X_3^R &= X_2^R.
\end{aligned}$$

Si trova, allora,

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im} G\} = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}0\\x_2+2x_3\\2x_2+(1+a)x_3\end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : 2x_2 + (1+a)x_3 = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R}, x_2 = -\frac{1+a}{2}x_3 \right\} = \langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-\frac{1+a}{2}\\1\end{bmatrix} \rangle \\
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}0\\5x_2+(4+2a)x_3\\(4+2a)x_2+(5+2a+a^2)x_3\end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rangle \right\} = \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Pertanto, il sistema è controllabile a zero in due passi per ogni valore di a.

iii) [1.5 punti] Dal precedente risultato emerge subito che il sistema è controllabile a zero per ogni valore di a e quindi ammette sempre un controllore dead-beat.

iv) [3.5 punti] Posto $K = [\,k_0 \quad k_1 \quad k_2\,]$, affinchè $F + gK$ sia nilpotente è sufficiente imporre

$$\det\begin{bmatrix} z-1-k_1 & -2-k_2 \\ -2 & z-1-a \end{bmatrix} = z^2 - (2+k_1+a)z + (-3+a+(1+a)k_1 - 2k_2) \equiv z^2.$$

Si trova allora $k_1 = -2-a$ e $k_2 = -\frac{5+2a+a^2}{2}$. Resta allora da scegliere k_0 in modo tale da rendere minimo possibile l'indice di nilpotenza di $F + gK$. Sostituendo i valori di k_1 e k_2 si trova:

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_0 & 1+k_1 & 2+k_2 \\ 0 & 2 & 1+a \end{bmatrix}.$$

Poichè tale matrice non è mai nulla, l'indice non potrà mai essere pari a 1. Proviamo a vedere se è possibile avere indice di nilpotenza pari a due. Elevando $F + gK$ al quadrato si trova:

$$(F+gK)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_0(-1-a) & 0 & 0 \\ 2k_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede allora che è possibile avere indice di nilpotenza 2 se e solo se $k_0 = 0$.

Esercizio 2. [4 punti] La trasformata zeta del segnale di ingresso è pari a

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{t\ \geq 0} u(t)z^{-t} = 1 + \sum_{t\ \geq 1} 2a^{t-1}z^{-t} = 1 + 2z^{-1}\sum_{t\ \geq 1} a^{t-1}z^{-t+1} \\ &= 1 + 2z^{-1}\sum_{t\ \geq 0} a^t z^{-t} = 1 + \frac{2z^{-1}}{1-az^{-1}} = 1 + \frac{2}{z-a} = \frac{z+2-a}{z-a}. \end{aligned}$$

La trasformata zeta dell'uscita, invece, è data da

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{t\ \geq 0} y(t)z^{-t} = -2\sum_{t\ \geq 2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1} z^{-t} = -2z^{-1}\sum_{t\ \geq 2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1} z^{-t+1} \\ &= -2z^{-1}\sum_{t\ \geq 1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t} z^{-t} = -2z^{-1}\left(\sum_{t\ \geq 0}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t} z^{-t} - 1\right) \\ &= -2z^{-1}\left(\frac{1}{1+\frac{z^{-1}}{2}} - 1\right) = \frac{1}{z(z+1/2)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, la f.d.t. del sistema risulta

$$w(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z(z+1/2)} \cdot \frac{z-a}{z+2-a} = \frac{z-a}{z(z+2-a)(z+1/2)}. \tag{1}$$

Affinchè il sistema sia BIBO stabile occorre e basta che i poli della f.d.t. siano tutti di modulo minore di 1. Poichè l'unico zero critico del denominatore è quello relativo al fattore $z+2-a$, ma esso non si semplifica mai con il numeratore $z-a$, ne consegue che per ogni valore di a lo zero in $a-2$ deve essere di modulo minore di 1. Ciò si verifica se e solo se $|a-2| < 1$. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $1 < a < 3$.

Esercizio 3. i) [3 punti] La coppia (F, h_1), dove $h_1 = [\,-1 \quad 1 \quad 0\,]$, non è osservabile, giacché

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_1F \\ h_1F^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ha determinante nullo ed è inoltre in forma standard di osservazione, con $(F_{11}, h_{11}) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, [\,-1 \quad 1\,]\right)$ coppia osservabile. Da $F_{22} = [-1]$ segue che $\lambda = -1$ è autovalore non osservabile e, per soddisfare le specifiche richieste, lo stimatore L_1 dovrà necessariamente attribuire a $F + L_1h_1$ il polinomio caratteristico $p(s) = (s+1)^3$. In particolare, ponendo

$$L_1^T = [\ell_1 \mid \ell_2]^T = [a\ b \mid c]^T$$

dove ℓ_1 fa riferimento al sottosistema osservabile, si ottiene

$$F_{11} + \ell_1 h_{11} = \begin{bmatrix} -a & 1+a \\ -2-b & 1+b \end{bmatrix}.$$

La condizione sul polinomio caratteristico risulta equivalente a $\Delta_{F_{11}+\ell_1h_{11}}(s) = (s+1)^2$, da cui si ottiene $\ell_1 = [1 \ \ -2]^T$, ossia

$$L_1 = [1 \ \ -2 \ c]^T$$

con c numero reale arbitrario.

ii) [4.5 punti] L'evoluzione dell'errore di stima $e(t)$ è data, per il sistema a tempo continuo (F, h_1) con stimatore L_2, dalla seguente espressione:

$$e(t) = e^{(F+L_2h_1)t}e_0,$$

dove e_0 è l'errore all'istante iniziale. Si tratta pertanto di calcolare l'esponenziale della matrice $F + L_2 h_1$:

$$F + L_2 h_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per effettuare il calcolo, ricorriamo alla formula di espansione in serie:

$$e^{(F+L_2h_1)t} = \sum_{k=0}^{\infty} (F + L_2 h_1)^k \, \frac{t^k}{k!};$$

inoltre, data la struttura diagonale a blocchi della matrice, le matrici potenza saranno a loro volta diagonali a blocchi, partizionate in modo conforme (e così pure la matrice esponenziale).

Il calcolo esplicito delle potenze di $F + L_2 h_1$ porge:

$$\begin{aligned} (F + L_2 h_1)^2 &= \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (F + L_2 h_1)^3 &= \begin{bmatrix} -8 & 21 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ (F + L_2 h_1)^4 &= \begin{bmatrix} 16 & -45 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

da cui si estrapola

$$(F + L_2 h_1)^k = \begin{bmatrix} (-2)^k & 3(-1)^k - 3(-2)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix},$$

che vale anche per $k = 0, 1$. Dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene, infine,

$$e^{(F+L_2h_1)t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{-t} - 3e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix},$$

che mette in evidenza i due modi del sistema. L'evoluzione dell'errore di stima $e(t)$ risulta:

$$e(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{-t} - 3e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Si noti che se uno si fosse accorto del fatto che e_0 è autovettore di $F + L_2 h_1$ relativo all'autovalore -1, avrebbe subito ottenuto $e(t) = e^{-t} e_0$.

iii) [4 punti] Abbiamo già verificato che la coppia (F, h_1) non è osservabile, con autovalore non osservabile pari a -1. Analogamente si verifica che il sistema è non osservabile dal solo secondo ingresso e gli autovalori non osservabili sono in tal caso complessi coniugati (non compatibili con le specifiche richieste). Per quanto riguarda l'osservabilità dai due ingressi, la matrice di osservabilità della coppia (F, H)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ha rango pieno per cui è possibile allocare a piacimento gli autovalori di $F + LH$.

Consideriamo un generico stimatore $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T$, a cui corrisponde:

$$F + LH = \begin{bmatrix} -a & 1+a & d \\ -2-b & 1+b & e \\ -c & c & -1+f \end{bmatrix}.$$

È possibile ora dare una struttura diagonale a blocchi alla matrice retroazionata, con un blocco 2×2 seguito da un blocco scalare. In particolare, se si attribuiscono al blocco 2×2 gli autovalori $-2, -3$ e al blocco scalare un autovalore a scelta fra -2 e -3, si ottiene una possibile soluzione al problema posto, garantendo la presenza dei soli modi $m_1(t) = e^{-2t}$ e $m_2(t) = e^{-3t}$.

Numericamente, posto $L = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, si ottiene

$$F + LH = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

con spettro $\sigma = \{-2, -2, -3\}$; mentre con $L = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$ si ottiene

$$F + LH = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

con spettro $\sigma = \{-2, -3, -3\}$. Entrambe le soluzioni presentano solamente i modi desiderati.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.