COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
18 Giugno 2009

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo di dimensione $n = 4$:

$$\dot{x}(t) \quad = \quad Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots \\ 0 & J_{\lambda_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove F è una matrice di dimensione 4×4, in forma di Jordan, con un certo numero h ($2 \leq h \leq 4$) di miniblocchi di Jordan J_{λ_i}, relativi ad autovalori reali λ_i e ordinati in modo tale che $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$ per ogni indice i.
Sapendo che i modi del sistema sono (tutti e soli) i seguenti:

$$e^{2t}, e^{-t}, te^{-t},$$

determinare le matrici F compatibili con le precedenti ipotesi e discutere la stabilizzabilità (per retroazione dallo stato) del sistema ottenuto in corrispondenza a ciascuna di esse.

Esercizio 2. Si consideri il modello di stato lineare a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= Hx(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, un ingresso di controllo che agisca sul solo primo ingresso (i.e., $u_2(k) = 0$) in modo da portare in due passi lo stato del sistema da $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ a $x_f = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}^\top$;

ii) si calcoli, se esiste, uno stimatore dello stato che presenti un unico modo elementare;

iii) si calcoli, se esiste, un controllore in retroazione che utilizzi entrambi gli ingressi in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti come polinomio caratteristico $p(z) = (z - 1/2)^3$.

Esercizio 3. Dato il modello di stato lineare a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= Hx(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} x(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

i) si determini, operando nel dominio del tempo, l'espressione dello stato al generico istante k in corrispondenza alla condizione iniziale $x(0) = [\,1 \quad 0 \quad 1\,]^\top$ e alla successione di ingresso $u(k) = \delta(k-1)$;

ii) si determini, operando nel dominio delle trasformate, se esiste, il segnale di ingresso che produce la seguente risposta forzata d'uscita:

$$\begin{cases} y_1(k) &=& \delta_{-1}(k-3), \\ y_2(k) &=& -\delta_{-1}(k-1) - \delta_{-1}(k-3); \end{cases}$$

iii) si dica se esiste uno stimatore dead-beat e in caso affermativo se ne costruisca uno che attribuisca alla risultante matrice $F + LH$ indice di nilpotenza minimo possibile.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si enunci e dimostri il teorema della forma canonica di controllo per sistemi raggiungibili ad un solo ingresso.

SOLUZIONI

Esercizio 1. [4.5 punti] L'insieme dei modi del sistema rivela l'esistenza di due soli autovalori per F, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, con molteplicità nel polinomio minimo rispettivamente pari a $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$. Il polinomio minimo di F risulta dunque pari a

$$\psi_F(s) = (s-2)(s+1)^2$$

ed è compatibile con due soli polinomi caratteristici di grado 4, ossia

$$\Delta_{F_1}(s) = (s-2)(s+1)^3 \quad \text{e} \quad \Delta_{F_2}(s) = (s-2)^2(s+1)^2.$$

Essi, a loro volta, corrispondono a due sole possibili strutture per la matrice F (in forma di Jordan e ordinata come indicato nel testo):

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si tratta ora di studiare la stabilizzabilità del sistema, alla luce del fatto che in entrambi i casi la matrice presenta un autovalore, $\lambda_1 = 2$, reale positivo.

Studiamo dapprima la coppia (F_1, G). Applicando il criterio PBH per sistemi la cui matrice di sistema sia in forma di Jordan, possiamo partizionare la matrice G in modo conforme alla partizione in blocchi della F_1:

$$G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_{11} \\ \hline G_{21} \\ \hline G_{22} \end{array}\right].$$

Ora il semplice fatto che ci sia un solo miniblocco relativo a $\lambda_1 = 2$ e che in corrispondenza a tale miniblocco la G abbia un blocco $G_{11} \neq 0$ garantisce che $\lambda_1 = 2$ non sia un autovalore del sottosistema non raggiungibile. Di conseguenza la coppia (F_1, G) è certamente stabilizzabile.

Applichiamo un ragionamento analogo alla coppia (F_2, G) ed andiamo a partizionare la matrice G in modo conforme alla partizione in blocchi della F_2:

$$G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_{11} \\ \hline G_{12} \\ \hline G_{21} \end{array}\right].$$

In questo caso abbiamo due miniblocchi relativi a $\lambda_1 = 2$ e in corrispondenza ad essi la G ha due blocchi, G_{11} e G_{12}, che sono due scalari e quindi non possono essere linearmente indipendenti. Ciò fa sì che $\lambda_1 = 2$ sia un autovalore del sottosistema non raggiungibile e quindi la coppia (F_2, G) non sia stabilizzabile.

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Detta g_1 la prima colonna della matrice G, l'espressione dello stato in corrispondenza a $k = 2$ è data da $x(2) = F^2 x(0) + \mathcal{R}_{1,2} u_2$, dove $\mathcal{R}_{1,2}$ è la matrice di raggiungibilità in due passi della coppia (F, g_1):

$$\mathcal{R}_{1,2} = [\, g_1 \quad F g_1 \,] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e $\mathcal{U}_2$ è il vettore di ingresso

$$\mathcal{U}_2 = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

Per garantire l'esistenza di un ingresso $\mathcal{U}_2$ che faccia evolvere il sistema da $x(0) = x_0$ a $x(2) = x_f$, deve essere verificata la condizione

$$x_f - F^2 x_0 \in \mathrm{Im} R_{1,2},$$

che si traduce in

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 9/4 \\ -1 \end{bmatrix} \in < \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} > = < \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} >,$$

condizione che risulta verificata. Pertanto esiste l'ingresso che risolve il problema di controllo assegnato ed esso si ottiene imponendo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 9/4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

da cui segue

$$\begin{aligned} u(0) &= -1 \\ u(1) &= 1/4. \end{aligned}$$

ii) [3 punti] Osserviamo preliminarmente che l'unico modo affinché l'osservatore del sistema presenti un solo modo è che la matrice $F + LH$, che governa la dinamica dell'errore di stima, abbia forma di Jordan del tipo λI_3, e quindi sia essa stessa del tipo λI_3, per qualche numero reale λ. La coppia (F, H) ha una struttura partizionata a blocchi in modo conforme a quello di una forma standard di osservazione, e la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, [\, 1 \quad 1 \,] \right)$$

è osservabile, giacché $\mathcal{O}_1 := \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1F_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ è non singolare. Pertanto la coppia (F, H) è proprio in forma standard di osservabilità con $F_{22} = -1/2$. Di conseguenza il problema ha soluzione solo se riusciamo a imporre $F + LH = (-1/2)I_3$. È immediato rendersi conto del fatto che, posto

$$L = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

la matrice $F + LH$ diventa

$$F + LH = \begin{bmatrix} a & a-1 & 0 \\ b+1 & b-2 & 0 \\ c & 1+c & -1/2 \end{bmatrix},$$

e si vede ad occhio che non esiste nessuna scelta dei parametri a, b e c che rende tale matrice coincidente con la matrice $(-1/2)I_3$.

iii) [3.5 punti] La matrice di raggiungibilità del sistema risulta

$$\mathcal{R} = [\, g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad F^2g_1 \quad F^2g_2 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & -5/2 & 1/4 \end{bmatrix},$$

ovviamente di rango 3. Il sistema è pertanto raggiungibile ed esiste una soluzione al problema proposto. Si consideri ora una matrice K parametrica

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo di $F + GK$ porge:

$$\begin{aligned} F + GK &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+a_1 & -2+b_1 & c_1 \\ a_2 & 1+b_2 & -1/2+c_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

che, ponendo $c_1 = 0$, $a_2 = 0$, e $b_2 = -1$, può essere ridotta in forma diagonale a blocchi, ovvero

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1+a_1 & -2+b_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2+c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F+GK)_1 & 0 \\ 0 & (F+GK)_2 \end{bmatrix}.$$

Imponendo

$$\begin{aligned} \Delta_{(F+GK)_1}(z) &= \det \begin{bmatrix} z & 1 \\ -1-a_1 & z+2-b_1 \end{bmatrix} = (z-1/2)^2 \\ \Delta_{(F+GK)_2}(z) &= z - c_2 + 1/2 = z - 1/2, \end{aligned}$$

si ottiene $a_1 = -3/4$, $b_1 = 3$, e $c_2 = 1$. La matrice di retroazione risulta pertanto

$$K = \begin{bmatrix} -3/4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. i) [3.5 punti] Valutiamo preliminarmente l'espressione della generica potenza k-esima della matrice F. Si trova subito che

$$F^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^{k+1} \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix}, \qquad k \geq 2.$$

D'altra parte, scrivendo l'espressione dello stato nei primi istanti interi non negativi, si trova

$$\begin{aligned} x(1) &= Fx(0) + Gu(0) = Fx(0) \\ x(2) &= Fx(1) + Gu(1) = F^2x(0) + G \\ x(3) &= Fx(2) + Gu(2) = F(F^2x(0) + G) \\ &\vdots \\ x(k) &= F^{k-2}(F^2x(0) + G), \qquad k \geq 4. \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned} x(1) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ x(2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x(3) &= F \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ x(k) &= 0, \qquad k \geq 4. \end{aligned}$$

ii) [4 punti] La funzione di trasferimento del sistema risulta essere

$$W(z) = H(zI_3 - F)^{-1}G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Data la struttura delle matrici H e G, ai fini del calcolo di $W(z)$ non è necessario calcolare tutti gli elementi dell'aggiunta di $zI_3 - F$, e si ha

$$W(z) = \frac{1}{z^2(z+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & -1 \\ * & * & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2(z+1)} \\ -\frac{1+z^2}{z^2(z+1)} \end{bmatrix}.$$

Con semplici calcoli si trova che l'uscita assegnata ha trasformata zeta

$$Y(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2(z-1)} \\ \\ -\frac{1+z^2}{z^2(z-1)} \end{bmatrix}$$

ed essa è legata alla trasformata zeta del relativo segnale di ingresso dalla relazione $Y(z) = W(z)U(z)$. Pertanto, imponendo l'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{z^2(z-1)} \\ \\ -\frac{1+z^2}{z^2(z-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^2(z+1)} \\ \\ -\frac{1+z^2}{z^2(z+1)} \end{bmatrix} U(z),$$

si verifica che esiste una soluzione al problema ed essa vale

$$U(z) = \frac{z+1}{z-1} = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{z-1},$$

che corrisponde a

$$u(k) = \delta_{-1}(k) + \delta_{-1}(k-1).$$

iii) [3.5 punti] Il calcolo della matrice di osservabilità porta a

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

che chiaramente ha rango pieno 3. Pertanto il problema ha soluzione. Se scriviamo L in forma parametrica, ovvero

$$L = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

ci accorgiamo che

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & a_0 - b_0 & b_0 - 1 \\ 1 & a_1 - b_1 & b_1 \\ 0 & a_2 - b_2 & b_2 - 1 \end{bmatrix}$$

ha la prima colonna di struttura fissa e le seconde due colonne completamente arbitrarie. Chiaramente, dal momento che la prima colonna non è nulla, la matrice non avrà mai indice di nilpotenza 1. Tuttavia imponendo

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è immediato rendersi conto che otterremo una matrice di indice di nilpotenza 2. Questa situazione si ottiene per

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione.