COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
19 Febbraio 2009 - A.A. 2008/2009

Esercizio 1. Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= F\mathbf{x}(t) + Gu(t) &&= \begin{bmatrix} 1-a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= H\mathbf{x}(t) &&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad\qquad t \in \mathbb{R}_+,
\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e si studino stabilità semplice e asintotica del sistema.
[Suggerimento: si noti la particolare struttura della matrice F];

ii) si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità BIBO del sistema.
[Suggerimento: anche in questo caso, per il calcolo della funzione di trasferimento del sistema, si sfrutti la struttura della matrice F];

iii) per $a = 0$, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, si determini, se possibile, l'evoluzione di ingresso che produce l'evoluzione forzata di uscita

$$y_f(t) = \left(1 - t - e^{-t}\right) \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= H\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

i) Si progetti un controllo in retroazione K che faccia uso di entrambi gli ingressi e attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $p(z) = (z + \frac{1}{2})^3$. A tal fine è richiesto di utilizzare il Lemma di Heymann in modo da rendere preliminarmente il sistema raggiungibile dal secondo ingresso;

ii) si dica se esiste uno stimatore dead-beat e in caso affermativo se ne costruisca uno che attribuisca alla matrice $F + LH$ indice di nilpotenza minimo possibile.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + g\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= H\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

i) Si determini, se esiste, una matrice di cambio di base T in modo tale che il sistema $(T^{-1}FT, T^{-1}g)$ sia in forma canonica di controllo e si scriva esplicitamente tale forma canonica di controllo;

ii) si determini, se esiste, una retroazione dallo stato che renda il risultante sistema retroazionato non osservabile e con funzione di trasferimento dotata di un polo in $1/2$.

Teoria. Dato un modello di stato a tempo continuo, tempo invariante,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\end{aligned}$$

si definisca il concetto di punto di equilibrio del sistema in corrispondenza ad ingresso costante e si illustri il processo di linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio e le ipotesi necessarie per poter effettuare la linearizzazione.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] La matrice F è diagonale a blocchi $F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$, con $F_{11} = \begin{bmatrix} 1-a^2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $F_{22} = \begin{bmatrix} a-2 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, per cui la sua forma di Jordan sarà ancora diagonale a blocchi con la seguente struttura:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

dove J_1 e J_2 sono le forme di Jordan di F_{11} e F_{22} rispettivamente.

Studiamo quindi dapprima la matrice F_{11}. Il suo spettro è $\sigma_{F_{11}} = \left\{1-a^2, 0\right\}$ e si possono distinguere due casi: se $a = \pm 1$, ovvero $(1-a^2) = 0$, risulta $F_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e non essendo la matrice nulla, segue che l'unica forma di Jordan compatibile con l'autovalore doppio in 0 è

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se invece $a \neq \pm 1$, i due autovalori sono distinti e si ottiene semplicemente

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda la matrice F_{22}, questa presenta come polinomio caratteristico $\Delta_{F_{22}} = (s + (1-a))^2$, dando luogo a un unico autovalore, $(a-1)$, di molteplicità algebrica pari a 2. La molteplicità geometrica associata a tale autovalore risulta

$$s_{a-1} = \dim\ker((a-1)I - F_{22}) = \dim\ker \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 1.$$

La forma di Jordan presenta quindi un unico miniblocco associato a tale autovalore:

$$J_2 = \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, per $a = \pm 1$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix},$$

ossia $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ per $a = 1$, e $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ per $a = -1$.

Per $a \neq \pm 1$

$$J = \begin{bmatrix} 1-a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}.$$

Veniamo ora allo studio della stabilità. Innanzitutto si osserva come per effetto della presenza dell'autovalore nullo, per qualsiasi valore del parametro reale a non si potrà mai avere stabilità asintotica. Inoltre, se $a = \pm 1$, non si ha stabilità semplice (polo doppio in 0); per $a \neq \pm 1$, si ha stabilità semplice se allo stesso tempo si verificano: $1 - a^2 < 0$ e $a - 1 > 0$, ossia solo per $a < -1$.

ii) [3.5 punti] Valutiamo ora, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità BIBO del sistema (si noti dal punto i) che non vi è mai stabilità asintotica). A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema, sfruttando la struttura diagonale a blocchi della matrice F. Poiché, infatti,

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix},$$

se partizioniamo H e g in maniera conforme, otteniamo

$$\begin{aligned} W(s) &= [\, H_1 \quad H_2 \,] \begin{bmatrix} sI - F_{11} & 0 \\ 0 & sI - F_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = H_1(sI - F_{11})^{-1} g_1 + H_2(sI - F_{22})^{-1} g_2 \\ &= H_2(sI - F_{22})^{-1} g_2, \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $H_2 = 0$. Di conseguenza:

$$W(s) = H_2(sI - F_{22})^{-1} g_2 = [\, 1 \quad 0 \,] \begin{bmatrix} s - a + 2 & 1 \\ -1 & s - a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{(s + (1 - a))^2},$$

che presenta un polo doppio in $s = a - 1$. Si ha stabilità BIBO, quindi, se $a - 1 < 0$, ossia $a < 1$.

iii) [3 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa $W(s) = -\frac{1}{(s+1)^2}$. La trasformata di Laplace del segnale di uscita $y_f(t)$ risulta

$$Y_f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{s^2(s+1)}.$$

Nel dominio delle trasformate di Laplace la risposta forzata $Y_f(s)$ è legata all'ingresso $U(s)$ dalla relazione $Y_f(s) = W(s)U(s)$, da cui si ricava:

$$U(s) = \frac{Y_f(s)}{W(s)} = \frac{1}{s^2(s+1)} \cdot (s+1)^2 = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Antitrasformando, si ottiene il segnale di ingresso cercato:

$$u(t) = (1 + t)\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [4 punti] La matrice di raggiungibilità del sistema risulta

$$\mathcal{R} = [\, g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad F^2 g_1 \quad F^2 g_2 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ovviamente di rango 3. Tuttavia è immediato verificare che nessuna delle due coppie (F, g_1) e (F, g_2) è raggiungibile. Utilizziamo il lemma di Heymann per costruire una matrice M_2 di pre-retroazione che renda il sistema retroazionato $(F + GM_2, G)$ raggiungibile dal solo secondo ingresso (i.e. la coppia $(F + GM_2, g_2)$ deve essere raggiungibile). Si costruiscono dapprima la matrice Q_2, selezionando in modo opportuno le colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{R}$, e la matrice S_2 ad essa correlata

$$Q_2 = [\, g_2 \quad Fg_2 \quad g_1 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta

$$M_2 = S_2 Q_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e operando la pre-retroazione si ottiene

$$F + GM_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema pre-retroazionato risulta raggiungibile dal secondo ingresso e attraverso una matrice parametrica $k_2 = [\, a \quad b \quad c \,]$, si ottiene

$$F + GM_2 + g_2 k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+a & 2+b & c \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico risulta

$$\Delta_{F+GM_2+g_2k_2}(z) = z^3 - (2+b)z^2 - (1+a+c)z - c.$$

Eguagliando il polinomio caratteristico richiesto $p(z) = (z + \frac{1}{2})^3 = z^3 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}$ a $\Delta_{F+GM_2+g_2k_2}(z)$, si ottiene

$$k_2 = [\, -\tfrac{13}{8} \quad -\tfrac{7}{2} \quad -\tfrac{1}{8} \,].$$

La matrice di retroazione complessiva risulta:

$$K = M_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{13}{8} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

iii) [4.5 punti] La coppia (F, H) ha una struttura partizionata a blocchi in modo conforme a quello di una forma standard di osservazione, e poiché la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, [\, 1 \quad 0 \,] \right)$$

è osservabile, giacché $\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 F_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è non singolare, la coppia (F, H) è proprio in forma standard di osservabilità.

Essendo $F_{22} = [0]$, la coppia (F, H) è ricostruibile e quindi esiste uno stimatore dead-beat. Posto $L = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \hline c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \end{bmatrix}$ al fine di garantire che $\Delta_{F+LH}(z) = z^3$ è sufficiente selezionare $L_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ in modo tale che

$$\Delta_{F_{11}+L_1 H_1}(z) = \det \begin{bmatrix} z-a & -1 \\ -(1+b) & z-2 \end{bmatrix} = z^2 - (a+2)z - (1+b-2a) = z^2.$$

Si trova, allora,

$$L_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

e, corrispondentemente, la matrice $F + LH$ diventa

$$F + LH = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché è evidente che $F + LH \neq 0_{3\times 3}$, non si può avere indice di nilpotenza 1. Ci chiediamo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F + LH$ abbia indice di nilpotenza pari a 2.
È possibile calcolare $(F + LH)^2$ in funzione di c e imporre

$$(F + LH)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2c-4 & c+2 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3\times 3}$$

da cui segue $c = -2$.
Pertanto

$$L = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

è lo stimatore dead-beat che attribuisce a $F + LH$ indice di nilpotenza minimo, pari a 2.

Esercizio 3. i) [3 punti] Poiché la matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = [\, g \quad Fg \,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno, la coppia (F, g) è raggiungibile e quindi è algebricamente equivalente ad una coppia in forma canonica di controllo. Il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(z) = \det \begin{bmatrix} z-2 & 2 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix} = (z-2)(z-1) + 2 = z^2 - 3z + 4.$$

Di conseguenza la forma canonica di controllo della coppia (F, g) è immediatamente determinata:

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad g_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A questo punto devo determinare la matrice T di cambio di base. A tal fine è utile ricordare che, se T è la matrice di cambio di base che fa passare da (F, g) a (F_c, g_c), le matrici di raggiungibilità della coppia (F, g) e della coppia (F_c, g_c), rispettivamente $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_c$, sono legate tra loro dalla relazione

$$\mathcal{R}_c = T^{-1}\mathcal{R}.$$

Da ciò segue

$$T^{-1} = \mathcal{R}_c\mathcal{R}^{-1}$$

e quindi

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}.$$

Calcoliamo allora $\mathcal{R}_c$:

$$\mathcal{R}_c = [\, g_c \quad F_c g_c \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

da cui

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii) [3 punti] Il sistema è raggiungibile e quindi attraverso retroazione dallo stato possiamo allocare liberamente gli autovalori della matrice $F + gK$ del sistema retroazionato. Posto $K = [\, a \quad b \,]$, si trova

$$F + gK = \begin{bmatrix} 2+a & -2+b \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imponiamo in primo luogo che il sistema retroazionato sia non osservabile. A tal fine è sufficiente calcolare la matrice di osservabilità della coppia $(F + gK, H)$ e imporre che non abbia rango pieno. Si trova:

$$\mathcal{O}_K = \begin{bmatrix} H \\ H(F + gK) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2+a & -2+b \end{bmatrix},$$

da cui segue immediatamente che il sistema retroazionato è non osservabile se e solo se $b = 2$. Una volta imposto questo valore al parametro b, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento del sistema retroazionato. Si trova

$$w_K(z) = H(zI_2 - F - gK)^{-1}g = [\, 1 \quad 0 \,] \begin{bmatrix} z-2-a & 0 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{z-2-a}.$$

Di conseguenza, la funzione di trasferimento del sistema retroazionato presenta un polo in $z = 1/2$ se e solo se $1/2 = 2 + a$ ovvero $a = -3/2$. Di conseguenza, la matrice K di retroazione cercata è

$$K = [\, -3/2 \quad 2 \,].$$

Si noti che il problema poteva essere risolto, ricorrendo ai risultati del punto i), anche con riferimento alla forma canonica di controllo $(T^{-1}FT, T^{-1}g, HT)$. In tal caso, una volta determinata la matrice K_c di retroazione rispetto alla base nuova, si doveva recuperare la matrice K nella forma

$$K = K_c T^{-1}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, a pagg. 38-42.