COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
19 Marzo 2008 - A.A. 2007/2008

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F evidenziandone i modi elementari ed il carattere (convergente, limitato, divergente).

ii) Si determini per quali valori di a, se esistono, il sistema risulta BIBO stabile senza essere asintoticamente stabile.
[Suggerimento: il calcolo dell'intera aggiunta non è necessario. Verificare a priori quali elementi dell'aggiunta è davvero necessario calcolare.]

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t).$$

i) Si determinino i sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità a zero in k passi per $k = 1, 2, \ldots$.

ii) Si determini, se possibile, un controllore deadbeat tale che la matrice di stato del corrispondente sistema retroazionato abbia indice di nilpotenza minimo.

iii) Si determini, se possibile, un ingresso di controllo che mandi a zero lo stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ nel minimo numero di passi.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + [g_1|g_2]\, u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

i) Si determini, se possibile, un controllo in retroazione dal solo primo ingresso in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti una funzione di trasferimento BIBO stabile.

ii) Si determini, se possibile, un controllo in retroazione dal solo secondo ingresso in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti come polinomio caratteristico $p(s) = (s+1)^3$.

iii) Si determini, se possibile, un controllo in retroazione dal solo secondo ingresso in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti unicamente il modo e^{-t}.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si discuta il problema dell'allocazione degli autovalori per un sistema raggiungibile a un ingresso ($m = 1$).

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] La matrice F ha struttura triangolare a blocchi (inferiore), con blocco inferiore destro che evidenzia a sua volta una struttura triangolare superiore. Il polinomio caratteristico della matrice F risulta pertanto:

$$\Delta_F(s) = (s-a)(s-1-a)(s-1+a),$$

con autovalori "presunti" $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = 1+a$, e $\lambda_3 = 1-a$. Peraltro, tali valori coincidono per opportuni valori del parametro a e specificatamente:

- per $a = 0$ si ha $\lambda_1 = 0$ con $n_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ con $n_2 = 2$. In tal caso, il calcolo della molteplicità geometrica s_2 relativa all'autovalore λ_2 porge:

  $$s_2 = \dim U_1 = \dim\ker[I-F] = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3-2 = 1,$$

  per cui nella forma di Jordan di F vi è un unico miniblocco associato all'autovalore 1. Di conseguenza, per $a = 0$ risulta:

  $$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  e i modi ad essa associati sono $m_1(t) = 1$ (limitato), $m_2(t) = e^t$ (divergente), e $m_3(t) = te^t$ (divergente).

- per $a = 1/2$ si ha $\lambda_1 = 1/2$ con $n_1 = 2$, $\lambda_2 = 3/2$ con $n_2 = 1$. In tal caso, il calcolo della molteplicità geometrica s_1 relativa all'autovalore λ_1 porge:

  $$s_1 = \dim U_{1/2} = \dim\ker\left[\frac{1}{2}I - F\right] = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3-1 = 2,$$

  per cui nella forma di Jordan di F vi sono due miniblocchi associati all'autovalore $1/2$. Di conseguenza, per $a = 1/2$ risulta:

  $$F_J = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

  e i modi ad essa associati sono $m_1(t) = e^{\frac{3}{2}t}$ (divergente), e $m_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}$ (divergente).

- infine, per $a \neq 0$ e $a \neq 1/2$ si hanno tre autovalori distinti $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = 1+a$, e $\lambda_3 = 1-a$, e la F risulta diagonalizzabile. In tal caso, la forma di Jordan di F risulta:

  $$F_J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}.$$

I modi ad essa associati sono $m_1(t) = e^{at}$ (convergente per $a < 0$, divergente per $a > 0$), $m_2(t) = e^{(1+a)t}$ (convergente per $a < -1$, limitato per $a = -1$, divergente altrimenti), e $m_3(t) = e^{(1-a)t}$ (convergente per $a > 1$, limitato per $a = 1$, divergente altrimenti).

ii) [3.5 punti] Si nota che non si ha asintotica stabilità per alcun valore di $a \in \mathbb{R}$. Pertanto, tutti gli (eventuali) valori per cui ci sarà BIBO stabilità saranno automaticamente valori per cui non c'è stabilità asintotica. Analizziamo quindi la stabilità BIBO del sistema. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(s) = H\,(sI - F)^{-1}\, g = [\,1 \quad 1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} s-a & 0 & 0 \\ -1 & s-1-a & -1 \\ 0 & 0 & s-1+a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che nel calcolo dell'inversa di $(sI - F)$ non è necessario calcolare esplicitamente tutti gli elementi della matrice aggiunta di $(sI - F)$, in quanto non tutti questi sono coinvolti nel calcolo del numeratore di $W(s)$. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{[\,1 \quad 1 \quad 0\,]}{(s-a)(s-a-1)(s-1+a)} \begin{bmatrix} (s-a-1)(s-1+a) & 0 & * \\ (s-1+a) & (s-a)(s-1+a) & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2(s-a)(s-1+a)}{(s-a)(s-a-1)(s-1+a)} = \frac{2}{s-1-a}. \end{aligned}$$

Per effetto delle cancellazioni, l'unico polo della $W(s)$ è $(1 + a)$: si ha pertanto BIBO stabilità (senza avere stabilità asintotica) se e solo se $a < -1$.

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova:

$$\begin{aligned} X_1^R &= \mathrm{Im}\,[g] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\ X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\ X_3^R &= \mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg \quad F^2 g\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = X_2^R. \end{aligned}$$

Pertanto il sistema non è raggiungibile.

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned} X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im} g\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ -2a-4b+c \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : c = 0 \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle, \\
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[g \quad Fg]\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2a+4b-c \\ 0 \\ -2a-4b+3c \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.
\end{aligned}
$$

Infine, poichè $X_2^C = \mathbb{R}^3$, certamente $X_3^C = X_2^C = \mathbb{R}^3$: il sistema (che non è raggiungibile) è controllabile a zero in due passi.

ii) [3.5 punti] Il sistema è controllabile a zero, per cui esiste un controllore DeadBeat. In alternativa, si può notare che il sistema è non raggiungibile con dimensione del sottosistema non raggiungibile pari a 1 e verificare attraverso il criterio PBH che l'autovalore relativo a tale sistema è 0: il che garantisce l'esistenza di un controllore DB.

In corrispondenza al un generico controllore in forma parametrica $K = [a \quad b \quad c]$ si ottiene:

$$
F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [a \quad b \quad c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2-a & -4-b & 1-c \end{bmatrix},
$$

il cui polinomio caratteristico assume la seguente espressione

$$
\Delta_{F+gK}(z) = \det \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ 0 & z & 0 \\ 2+a & 4+b & z-1+c \end{bmatrix} = z^3 + z^2(c-1) - z(2+a).
$$

Affinchè il polinomio caratteristico $\Delta_{F+gK}(z)$ sia pari $p(z) = z^3$, ossia $F + gK$ sia nilpotente, deve essere:

$$
\begin{cases} c - 1 = 0 \\ 2 + a = 0 \end{cases}
$$

Ciò porta alla seguente struttura per la matrice di retroazione

$$
K = [-2 \quad b \quad 1],
$$

con b arbitrario.

Con tale matrice di retroazione, la matrice di stato del sistema retroazionato risulta:

$$
F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4-b & 0 \end{bmatrix},
$$

da cui si nota subito che per rendere $F+gK$ nilpotente con indice di nilpotenza minimo e pari a 2 (ricordando che il sistema è controllabile in 2 passi) basta porre $b=-4$. In alternativa, si può studiare la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore nullo per la matrice $F+gK$ pervenendo al medesimo risultato. Si ottiene in definitiva:

$$K = [-2 \quad -4 \quad 1].$$

iii) [3 punti] Il sistema è controllabile in due passi, per cui esiste sicuramente un ingresso opportuno che porta lo stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ a zero in due passi. D'altronde

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \notin \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = X_1^C$$

per cui 2 è anche il numero minimo di passi.

Dalla equazione di aggiornamento dello stato in 2 passi

$$0 = x(2) = F^2 x(0) + \mathcal{R}_2 u_2,$$

risulta

$$-F^2 x(0) = [\, g \quad Fg \,] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

ossia

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

Dopo semplici calcoli risulta

$$\begin{aligned} u(0) &= -3; \\ u(1) &= -2. \end{aligned}$$

Alternativamente, si può giungere allo stesso risultato da

$$u_2 = -\left[\mathcal{R}_2^T \mathcal{R}_2\right]^{-1} \mathcal{R}_2^T F^2 x(0).$$

Esercizio 3. i) [4 punti] Si nota che la coppia (F, g_1) non è raggiungibile, giacché

$$\mathcal{R}_1 = [g_1 | F g_1 | F^2 g_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango $2 < 3$. Peraltro, una volta verificata la raggiungibilità della coppia $(F_{11}, g_{11}) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, è immediato rendersi conto del fatto che la coppia (F, g_1) è in forma standard di raggiungibilità.

Si ricordi che la funzione di trasferimento di un sistema non raggiungibile coincide con la funzione di trasferimento del sottosistema raggiungibile, e retroazionando un sistema in forma standard di raggiungibilità si ottiene nuovamente un sistema in forma standard di raggiungibilità. Nella fattispecie, in corrispondenza al un generico controllore in forma parametrica $K = [a \quad b \quad c]$ si ottiene:

$$F + g_1 K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\, a \quad b \quad c \,] = \begin{bmatrix} 1+a & b & 1+c \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La funzione di trasferimento $w_K(s)$ del sistema retroazionato $\Sigma_K = (F+g_1K, g_1, H)$ coincide con la funzione di trasferimento del sottosistema raggiungibile $\left(\begin{bmatrix} 1+a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\, 1 \quad 1 \,] \right)$, ossia

$$w_K(s) = [\, 1 \quad 1 \,] \begin{bmatrix} s-1-a & -b \\ -2 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s}{s^2 - s(3+a) + (2+2a-2b)}.$$

Affinchè la funzione di trasferimento $w_K(s)$ sia BIBO stabile, i suoi poli p_i devono essere $\mathrm{Re}(p_i) < 0$. Una possibile scelta del polinomio a denominatore di $w_K(s)$ risulta $p(s) = (s+1)^2 = s^2+2s+1$. Eguagliando i coefficienti si ha

$$\begin{cases} -3-a = 2 \\ 2+2a-2b = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce la seguente matrice di retroazione

$$K = \begin{bmatrix} -5 & -\frac{9}{2} & c \end{bmatrix},$$

con c arbitrario.

ii) [3 punti] Il calcolo della matrice di raggiungibilità della coppia (F, g_2) porge:

$$\mathcal{R}_2 = [g_2 | F g_2 | F^2 g_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

che ha rango pieno pari a 3. Pertanto la coppia (F, g_2) è raggiungibile, e il polinomio caratteristico del sistema retroazionato $\Delta_{F+g_2K}(s)$ è arbitrariamente allocabile attraverso una opportuna matrice di retroazione K.

Considerando una generica matrice di retroazione scritta in forma parametrica, $K = [a \quad b \quad c]$, si ottiene

$$F + g_2 K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -a & -b & -c+1 \end{bmatrix},$$

da cui si ricava

$$\Delta_{F+g_2K}(s) = s^3 + s^2(-4+c) + s(5+a-3c) + (2b-2a+2c-2).$$

Per ottenere il controllore richiesto, occorre ora imporre la condizione $\Delta_{F+g_2K}(s) = (s+1)^3$, ossia

$$\begin{cases} -4+c=3 \\ 5+a-3c=3 \\ 2b-2a+2c-2=1 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema fornisce il controllore cercato

$$K = \begin{bmatrix} 19 & \frac{27}{2} & 7 \end{bmatrix}.$$

iii) [2 punti] Per soddisfare il vincolo sui modi, occorre e basta imporre che il polinomio minimo della matrice $F+g_2K$ sia $\psi_{F+g_2K}(s) = (s+1)$ o, equivalentemente, che la forma di Jordan di $F+g_2K$ sia

$$(F+g_2K)_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tale polinomio minimo è compatibile solo con il polinomio caratteristico $\Delta_{F+g_2K}(s) = (s+1)^3$, per cui possiamo considerare il risultato dell'analisi al punto ii) come punto di partenza.

Retroazionando il sistema con la matrice

$$K = \begin{bmatrix} 19 & \frac{27}{2} & 7 \end{bmatrix}.$$

si ottiene

$$F+g_2K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -19 & -\frac{27}{2} & -6 \end{bmatrix}.$$

Affinchè $F+g_2K$ abbia la forma di Jordan evidenziata $(F+g_2K)_J$, la molteplicità geometrica desiderata dell'autovalore -1 di $F+g_2K$ è pari a 3. Da

$$\dim\ker(-I-F-g_2K) = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 19 & \frac{27}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

si vede peraltro come tale molteplicità risulta pari a 1.

Pertanto, non esiste il controllore desiderato, tale che il sistema retroazionato abbia come unico modo e^{-t}.

Teoria. [4.5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova.