COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
4 Aprile 2008 - A.A. 2007/2008

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = ax_1(t) - x_2(t)u(t),\\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_1^2(t) - ax_1(t)u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

i) Si determinino, al variare di a ed $\bar{u}$ in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}, t \in \mathbb{R}_+$;

ii) per $a = 0$, si determini il modello linearizzato del sistema in corrispondenza a ciascuno dei punti di equilibrio (generici) determinati in corrispondenza a ciascun valore di $\bar{u}$.

Nota: nel testo del compito dato in classe era presente un errore nella prima equazione del sistema che recitava: $\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = ax_2(t) - x_2(t)u(t)$***.***

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + [g_1|g_2]\,u(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t),\\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]\,x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

i) Si determini, se possibile, un controllore in retroazione dal solo primo ingresso g_1 in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia osservabile.

ii) Si determini, se possibile, un controllore in retroazione dal solo primo ingresso g_1 in modo tale che il risultante sistema retrazionato abbia solo i modi e^{-t} ed e^{-2t}.

iii) Si determini, se possibile, un controllore in retroazione da entrambi gli ingressi in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi elementari esclusivamente e^{-2t} e $t \cdot e^{-2t}$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Fx(k) + gu(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(k),\\ y(k) &= Hx(k) = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]\,x(k), \qquad k \geq 0.\end{aligned}$$

i) Si determini, **operando nel dominio del tempo**, l'espressione dello stato al generico istante $k \in \mathbb{Z}_+$ in corrispondenza allo stato iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e all'ingresso $u(k) = \delta(k)$.

ii) Determinare, se esiste e **operando nel dominio delle trasformate**, una sollecitazione di ingresso a cui corrisponde l'evoluzione forzata di uscita $y_f(k) = k = \binom{k}{1}$ (per $k \in \mathbb{Z}_+$).

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria.

- *Studenti IG*: Si dimostri che un sistema $\Sigma = (F, G, H)$, di dimensione n, è raggiungibile se e solo se la matrice $[\, zI_n - F \quad | \quad G\,]$ ha rango n per ogni $z \in \mathbb{C}$.
- *Studenti IMC*: Si enunci e si illustri con un esempio il criterio di raggiungibilità per coppie (F, G) con F in Forma di Jordan.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} 0 &= ax_{1e} - x_{2e}\bar{u} \\ 0 &= x_{1e}^2 - ax_{1e}\bar{u} = x_{1e}(x_{1e} - a\bar{u}). \end{cases}$$

Distinguiamo prima di tutto i casi (1) $a = 0$ e (2) $a \neq 0$.
(1) Per $a = 0$ il sistema da risolvere diventa

$$\begin{cases} 0 &= x_{2e}\bar{u} \\ 0 &= x_{1e}^2. \end{cases}$$

La seconda equazione ha come unica soluzione $x_{1e} = 0$. Per la prima equazione, invece, abbiamo: per $\bar{u} = 0$ la componente x_{2e} è arbitraria in $\mathbb{R}$, per $\bar{u} \neq 0$ la componente x_{2e} deve essere nulla. Pertanto per $a = 0$ abbiamo:

- per $\bar{u} = 0$, $\mathbf{x}_e = (0, x_{2e})$ con $x_{2e} \in \mathbb{R}$;
- per $\bar{u} \neq 0$, $\mathbf{x}_e = (0, 0)$.

(2) Per $a \neq 0$ il sistema da risolvere si riscrive in modo equivalente nella forma

$$\begin{cases} x_{1e} &= \dfrac{x_{2e}\bar{u}}{a} \\ \\ 0 &= x_{1e}(x_{1e} - a\bar{u}) \end{cases}$$

e, sostituendo nella seconda equazione l'espressione di x_{1e} ricavata dalla prima, otteniamo

$$0 = \frac{x_{2e}\bar{u}}{a}\left(\frac{x_{2e}\bar{u}}{a} - a\bar{u}\right) = \frac{x_{2e}\bar{u}^2}{a^2}\left(x_{2e} - a^2\right).$$

Questa seconda equazione ammette ancora soluzioni differenti a seconda che $\bar{u}$ sia nullo o meno: se $\bar{u} = 0$ la seconda equazione è soddisfatta per ogni scelta di x_{2e} pertanto resta solo la prima equazione ma in cui a $\bar{u}$ devo sostituire il valore nullo. Pertanto si trova $\mathbf{x}_e = (0, x_{2e})$ con $x_{2e} \in \mathbb{R}$. Se $\bar{u} \neq 0$ la seconda equazione si annulla per $x_{2e} = 0$ e per $x_{2e} = a^2$. Alla prima soluzione corrisponde (sostituendo nella prima equazione) il punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e alla seconda soluzione il punto $\mathbf{x}_e = (a\bar{u}, a^2)$. Pertanto per $a \neq 0$ abbiamo:

- per $\bar{u} = 0$, $\mathbf{x}_e = (0, x_{2e})$ con $x_{2e} \in \mathbb{R}$;
- per $\bar{u} \neq 0$, $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_e = (a\bar{u}, a^2)$.

Va evidenziato come l'analisi di punti di equilibrio avrebbe potuto essere condotta anche in modo completamente diverso, distinguendo a priori il caso $\bar{u} = 0$ dal caso $\bar{u} \neq 0$, e si sarebbe pervenuti al medesimo risultato finale.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ le equazioni del sistema non lineare sono del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = -x_2(t)u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_1^2(t), \qquad\qquad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

e presenta come punti di equilibrio

- per $\bar{u} = 0$, $\mathbf{x}_e = (0, x_{2e})$ con $x_{2e} \in \mathbb{R}$;
- per $\bar{u} \neq 0$, $\mathbf{x}_e = (0, 0)$.

Il sistema linearizzato in un intorno di un generico punto di equilibrio assume la forma

$$\delta\dot{x}(t) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

dove

$$\begin{aligned} F &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{u} \\ 2x_{1e} & 0 \end{bmatrix}; \\ G &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \begin{bmatrix} -x_{2e} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto nei punti di equilibrio del tipo $\mathbf{x}_e = (0, x_{2e})$ per $\bar{u} = 0$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} -x_{2e} \\ 0 \end{bmatrix},$$

mentre nell'origine per $\bar{u} \neq 0$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Si verifica che la coppia (F, g_1) non è raggiungibile, giacché

$$\mathcal{R}_1 = [g_1 | Fg_1 | F^2 g_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 19 \end{bmatrix}$$

ha rango $2 < 3$. Poiché la teoria non ci dice nulla a priori sulla risolubilità del problema procediamo come segue. Posto $k_1 = [a \quad b \quad c]$, la matrice $F + g_1 k_1$ diventa

$$F + g_1 K_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 3+b & 4+c \end{bmatrix}.$$

Valutiamo la matrice di osservabilità $\mathcal{O}_{k_1}$ del sistema retroazionato e verifichiamo se esistono dei valori dei paramteri a, b e c in corrispondenza ai quali tale matrice diventa non singolare, ovvero il suo determinante risulta non nullo. Si trova

$$\mathcal{O}_{k_1} = \begin{bmatrix} H \\ H(F+g_1k_1) \\ H(F+g_1k_1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 3+b & 4+c \\ a(3+c) & (3+b)(4+c) & 3+b+(4+c)^2 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$\det \mathcal{O}_{k_1} = a(3+b).$$

Pertanto ogni controllore k_1 con $a \neq 0$ e $b \neq -3$ rende il sistema retroazionato osservabile. Ad esempio, possiamo scegliere $k_1 = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]$.

ii) [3.5 punti] Come osservato in precedenza la coppia (F, g_1) non è raggiungibile. Peraltro, una volta verificata la raggiungibilità della coppia $(F_{22}, g_{12}) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, è immediato rendersi conto del fatto che la coppia (F, g_1) è una specie di forma standard di raggiungibilità alla rovescia, con matrice del sistema non raggiungibile pari a $F_{11} = [-1]$. Il polinomio caratteristico relativo al sottosistema non raggiungibile risulta pertanto $\Delta_{F_{11}}(s) = (s+1)$. Il problema posto richiede di determinare, se esiste, una matrice di retroazione $k_1 = [\,a \quad b \quad c\,]$, in modo tale che $\psi_{F+g_1k_1}(s) = (s+1)(s+2)$. Tale polinomio minimo è compatibile con due polinomi caratteristici, ovvero $p(s) = (s+1)^2(s+2)$ e $p(s) = (s+2)^2(s+1)$, ed entrambi sono allocabili per retroazione in quanto multipli del polinomio $s+1$ del sottosistema non raggiungibile. Osserviamo che la matrice F è diagonale a blocchi e che imponendo $a = 0$ è possibile mantenere per $F + g_1k_1$ una struttura diagonale a blocchi:

$$F + g_1k_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3+b & 4+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{F}_2 \end{bmatrix}.$$

Ora poiché una matrice di questo tipo ha forma di Jordan

$$J_{F+g_1k_1} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

dove J_1 è la forma di Jordan di $\tilde{F}_1 = [-1]$ e J_2 la forma di Jordan di $\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3+b & 4+c \end{bmatrix}$, è chiaro che se attribuiamo a $\tilde{F}_2$ il polinomio caratteristico $(s+1)(s+2)$ otteniamo

$$J_{F+g_1k_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

che risolve il problema nel caso $\Delta_{F+g_1k_1}(s) = (s+1)^2(s+2)$ e $\psi_{F+g_1k_1}(s) = (s+1)(s+2)$. La soluzione numerica è banale, ora, visto che la matrice $\tilde{F}_2$ è in forma compagna. Si trova quindi

$$k_1 = [\,0 \quad -5 \quad -7\,].$$

Si noti che se uno avesse cercato di attribuire a $F + g_1 k_1$ struttura diagonale a blocchi e a $\tilde{F}_2$ il polinomio caratteristico $(s+2)^2$ non avrebbe ottenuto il polinomio minimo desiderato per $F + g_1 k_1$. I conti sono omessi per brevità.

iii) [4 punti] Il calcolo della matrice di raggiungibilità porge:

$$\mathcal{R} = [G|FG|F^2G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 19 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto la coppia (F, G) è raggiungibile e il polinomio caratteristico del sistema retroazionato $\Delta_{F+GK}(s)$ è arbitrariamente allocabile attraverso una opportuna matrice di retroazione K. Per soddisfare il vincolo sui modi, occorre e basta imporre che il polinomio minimo della matrice $F + GK$ sia $\psi_{F+GK}(s) = (s+2)^2$. Per ottenere tale polinomio minimo è necessario (ma non sufficiente) che il polinomio caratteristico sia:

$$\Delta_{F+GK}(s) = (s+2)^3.$$

Anche in questo caso, posto

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

possiamo cercare di attribuire alla matrice

$$F + GK = \begin{bmatrix} -1 + a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 3 + b_1 & 4 + c_1 \end{bmatrix}$$

la struttura diagonale a blocchi

$$F + GK = \begin{bmatrix} -1 + a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 + b_1 & 4 + c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{F}_2 \end{bmatrix}.$$

con $\tilde{F}_1 = [-2]$ e $\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 + b_1 & 4 + c_1 \end{bmatrix}$ avente polinomio caratteristico $(s+2)^2$. In tal modo, infatti, si avrà

$$J_{F+GK} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

dove J_1 è la forma di Jordan di $\tilde{F}_1$ e J_2 la forma di Jordan di $\tilde{F}_2$ e in questo caso risulterà

$$J_{F+GK} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

come desiderato. La soluzione numerica è banale per la medesima ragione di prima, visto che $\tilde{F}_2$ è in forma compagna. Si trova quindi

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. i) [4.5 punti] Si noti, in primo luogo, che per $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e per la struttura della matrice F, si ha $Fx(0) = 0$. Inoltre, dato $u(k) = \delta(k)$ l'evoluzione forzata dello stato diventa:

$$\begin{aligned} x(1) &= Fx(0) + Gu(0) = G \\ x(2) &= Fx(1) + Gu(1) = FG \\ x(3) &= Fx(2) + Gu(2) = F^2G \\ &\vdots \\ x(k) &= F^{k-1}G, \quad \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Si tratta, quindi, di valutare l'espressione della generica potenza k-esima della matrice F.

Il calcolo dell'espressione della generica potenza k-esima della matrice F fornisce per $k \geq 2$:

$$F^k = \begin{bmatrix} 3^{k-1} & -3^{k-1} & -3^{k-2} \\ -2\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi l'evoluzione forzata di stato risulta espressa per $k = 1$ nella forma

$$x(1) = G = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

per $k = 2$ nella forma

$$x(2) = FG = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e per $k \geq 3$ nel seguente modo:

$$x(k) = F^{k-1}G = \begin{bmatrix} 3^{k-1} & -3^{k-1} & -3^{k-2} \\ -2\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3^{k-1} \\ 2\cdot 3^{k-1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

che vale peraltro anche per $k = 2$.

ii) [3.5 punti] La funzione di trasferimento del sistema risulta

$$W(z) = H(zI_3 - F)^{-1}G = \frac{1}{z-3}.$$

La successione d'uscita $y_f(k) = k = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ ha trasformata zeta $Y_f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

La trasformata zeta della corrispondente successione di ingresso si ottiene facilmente come

$$U(z) = \frac{Y_f(z)}{W(z)} = \frac{z\,(z-3)}{(z-1)^2}$$

La decomposizione in fratti semplici di $U_1(z) = \frac{U(z)}{z} = \frac{z-3}{(z-1)^2}$ porta a

$$U_1(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2},$$

da cui segue

$$U(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{(z-1)^2},$$

la cui antitrasformata è

$$u(k) = \delta_{-1}(k) - 2\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = (1-2k)\delta_{-1}(k).$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.