COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
29 Agosto 2008

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k)+gu(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= Hx(k) = [\,1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

i) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera di stato al generico istante $k \in \mathbb{N}$, a partire dal generico stato iniziale $\mathbf{x}(0) = [\, x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0)\,]^T$;

ii) si determinino i sottospazi di controllabilità X_k^C per $k = 1, 2, 3$;

iii) si determini, se esiste, una retroazione dallo stato in modo che il risultante sistema retroazionato sia un filtro FIR (a risposta impulsiva finita) pur non essendo a memoria finita.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + [g_1 \; g_2]\, u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo primo ingresso g_1 in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti tra i suoi modi $\sin t$ e $\cos t$;

ii) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione K che faccia uso di entrambi gli ingressi e attribuisca al risultante sistema retroazionato i soli modi elementari $e^{-3t}, t\, e^{-3t}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t)+gu(t) = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ a & 2-2a & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & 1-a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t), \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determinino, se possibile, i valori di $a \in \mathbb{R}$ che rendono F nilpotente indicando il corrispondente indice di nilpotenza.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$,

ii) Si determini, se possibile, un controllore dead-beat K.

iii) Si determini, se possibile, un **regolatore** dead-beat.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria.

- *Studenti IG*: Si enunci e dimostri il teorema della forma canonica di controllo per sistemi raggiungibili ad un solo ingresso.
- *Studenti IMC*: Dato un sistema $\Sigma = (F, G, H)$ e il corrispondente sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$, si enuncino e si dimostrino le proposizioni sulla raggiungibilità/non raggiungibilità di Σ_K a partire dalle corrispondenti proprietà del sistema Σ.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] I tre autovalori della matrice F, sono $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il calcolo della generica potenza k-esima della matrice F può essere effettuato per tentativi e porta al seguente risultato:

$$F^1 = F, \qquad F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F^k = 0_{3\times 3}, \forall\ k \geq 3.$$

Di conseguenza, l'evoluzione libera di stato in corrispondenza ad uno generico stato iniziale, per $k \geq 1$, risulta

$$\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ 0 \\ x_1(0) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2(0) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(k) = 0, \forall\ k \geq 3.$$

ii) [3 punti] I sottospazi di raggiungibilità sono

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im} g = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle, \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\, g \quad Fg \,] = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle, \\
X_3^R &= \mathrm{Im}\,[\, g \quad Fg \quad F^2 g \,] = \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, il sistema è raggiungibile e pertanto risulterà pure controllabile a zero. I sottospazi di controllabilità sono

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im} g \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle, \\
X_2^C &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F^2\mathbf{x} = F(F\mathbf{x}) \in \mathrm{Im}\,[\, g \quad Fg \,] \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle, \\
X_3^C &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F^2\mathbf{x} = F(F\mathbf{x}) \in \mathrm{Im}\,[\, g \quad Fg \quad F^2 g \,] \right\} = \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

iii) [4 punti] Abbiamo già visto che il sistema è raggiungibile e pertanto possiamo attribuire al polinomio caratteristico del sistema retroazionato una terna di autovalori del tutto arbitraria.

Affinché il sistema retroazionato sia un filtro FIR è necessario che i poli della funzione di trasferimento del sistema retroazionato $w_K(z)$ siano tutti collocati nell'origine. Tuttavia, perchè ciò accada senza che il sistema retroazionato sia un sistema a memoria finita, è necessario che il polinomio caratteristico del sistema retroazionato (i cui zeri contengono i poli di $w_K(z)$) abbia almeno uno zero non collocato nell'origine. Ora la funzione di trasferimento del sistema di partenza è

$$\begin{aligned} w(z) &= H(zI_3 - F)^{-1}g = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ -1 & 0 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{z + z^2}{z^3} = \frac{z(z+1)}{z^3}. \end{aligned}$$

Ricordando che, essendo il sistema SISO e raggiungibile, attraverso retroazione dallo stato possiamo ottenere come funzioni di trasferimento tutte e sole quelle del tipo

$$w_K(z) = \frac{z(z+1)}{\Delta_{F+gK}(z)},$$

al variare di $\Delta_{F+gK}(z)$ tra i polinomi monici di grado 3, ne consegue che possiamo ottenere il duplice obiettivo di avere tutti i poli di $w_K(z)$ collocati nell'origine, senza che lo siano tutti gli zeri di $\Delta_{F+gK}(z)$, semplicemente scgliendo $\Delta_{F+gK}(z) = z^2(z+1)$. Posto

$$K = [\, k_0 \quad k_1 \quad k_2 \,],$$

si trova

$$\Delta_{F+gK}(z) = z^3 - k_1 z^2 - k_0 z - k_2 \equiv z^3 + z^2$$

se e solo se $K = [\, 0 \quad -1 \quad 0 \,]$.

Esercizio 2. i) [3 punti] Si noti, preliminarmente, che l'esercizio richiede di determinare, se esiste, una matrice K_1 in modo tale che il polinomio caratteristico di $F + g_1 K_1$ sia multiplo di $s^2 + 1$ e pertanto assuma la forma $\Delta_{F+g_1K_1}(s) = (s^2+1)(s-\lambda)$ per qualche numero reale λ. È immediato verificare che la coppia (F, g_1) è in forma standard di raggiungibilità, dal momento che la coppia

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

è in forma canonica di controllo ed è quindi raggiungibile. La matrice F_{22} del sottosistema non raggiungibile è $F_{22} = [-2]$ e quindi il problema ha soluzione per $\lambda = -2$. Se attribuiamo alla matrice di retroazione K_1 la forma parametrica $K_1 = [\, a \quad b \quad c \,]$, sfruttando la forma standard e la forma canonica del sottosistema raggiungibile, è sufficiente selezionare i parametri a e b in modo tale che

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\, a \quad b \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a-1 & b-2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ciò porta alla soluzione

$$K_1 = [\, 0 \quad 2 \quad c \,],$$

con c numero reale arbitrario.

ii) [3.5 punti] Il calcolo della matrice di raggiungibilità per la coppia (F, G) porge

$$\mathcal{R} = [\, g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad F^2g_1 \quad F^2g_2 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

chiaramente di rango 3. Il problema richiede di attribuire alla matrice $F + GK$ del sistema retroazionato polinomio minimo $\psi_{F+GK}(s) = (s+3)^2$. A tale polinomio minimo corrisponde il solo polinomio caratteristico $\Delta_{F+GK}(s) = (s+3)^3$ che è certamente allocabile come polinomio caratteristico, alla luce della raggiungibilità del sistema. Per attribuire immediatamente il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo desiderati, è sufficiente osservare che, posto

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

la matrice $F + GK$ diventa

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 + a_1 & -2 + b_1 & 1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & -2 + c_2 \end{bmatrix}$$

e quindi le sue ultime due righe sono completamente arbitrarie. Possiamo, in particolare, attribuire a $F + GK$ una struttura diagonale a blocchi con il primo blocco (2×2) di polinomio caratteristico $(s+3)^2$ ed il secondo blocco (1×1) di polinomio caratteristico $(s+3)$, ovvero:

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

È infatti immediato verificare che tale matrice ha forma di Jordan

$$J_{F+GK} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

e quindi soddisfa i requisiti del problema. Eguagliando coefficiente per coefficiente le due espressioni ottenute per $F + GK$, ricaviamo per i parametri della matrice K i seguenti valori

$$K = \begin{bmatrix} -8 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. i) [3.5 punti] Studiare la nilpotenza della matrice F al variare di $a \in \mathbb{R}$ è equivalente a determinare i valori del parametro a per cui tutti gli autovalori di F sono in zero, ovvero F ha come polinomio caratteristico $\Delta_F^a(z) = z^4$. La matrice F ha struttura triangolare a blocchi inferiore, per cui il polinomio caratteristico fattorizza nella forma

$$\Delta_F^a(z) = \Delta_{F_1}^a(z)\Delta_{F_2}^a(z),$$

con $F_1 = [\,1-a\,]$ e $F_2 = \begin{bmatrix} 2-2a & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Si ottiene, allora,

$$\Delta_F^a(z) = [z-(1-a)]\left[z^3 - z^2(1-a) - 2z^2(1-a) + 2z(1-a)^2 - a(1-a)\right],$$

da cui appare evidente come l'unico valore di a che permetta di avere $\Delta_F^a(z) = z^4$ è $a = 1$ e per tale valore di a la matrice F risulti

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'indice di nilpotenza corrisponde alla dimensione del miniblocco più grande della forma di Jordan J di F. Per determinarlo si può procedere in due modi: un primo modo consiste nel valutare il numero di miniblocchi di J. Esso è pari alla molteplicità geometrica s_0 associata all'autovalore 0:

$$s_0 = \dim\ker(0\cdot I_4 - F) = 4 - \operatorname{rank}(F) = 4-3 = 1.$$

La forma di Jordan di F è composta quinsi da un unico miniblocco, necessariamente di dimensione 4; pertanto anche l'indice di nilpotenza di F è 4.

Alternativamente si può sfruttare la definizione di indice di nilpotenza ed elevare F a potenza fino ad ottenere la prima potenza nulla. Anche per questa strada si verifica che l'indice di nilpotenza di F è pari a 4.

ii) [3.5 punti] Per $a = 0$ la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e presenta come spettro $\sigma(F) = \{0,1,1,2\}$. La matrice di raggiungibilità della coppia (F, g) è

$$\mathcal{R} = [\,g \quad Fg \quad F^2g \quad F^3g\,] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ed ha rango pieno. Il sistema è pertanto completamente raggiungibile, il che garantisce l'esistenza di un controllore dead-beat K che allochi il polinomio caratteristico del sistema retroazionato $F + gK$ in $p(z) = z^4$.

Introduciamo una matrice di retroazione generica $K = [\,\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta\,]$ ottenendo così

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [\,\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta\,] = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 1-\beta & -\gamma & -\delta \end{bmatrix}.$$

Ponendo $\delta = 0$ si ottiene una struttura triangolare a blocchi del tipo

$$F + gK = \begin{bmatrix} (F+gK)_1 & 0 \\ * & (F+gK)_2 \end{bmatrix},$$

con $(F+gK)_1 = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta & -\gamma \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(F+gK)_2 = [\,0\,]$ e $\Delta_{F+gK}(z) = \Delta_{(F+gK)_1}(z)\Delta_{(F+gK)_2}(z)$.
Si deduce che per ottenere un controllore dead-beat è necessario imporre $\Delta_{(F+gK)_1}(z) = z^3$, ossia

$$z^3 + z^2(\alpha - 4) + z(-3\alpha + \gamma + 5) + (2\alpha + \beta - 2\gamma - 2) = z^3,$$

da cui:

$$\alpha = 4 \quad \beta = 8 \quad \gamma = 7.$$

Il controllore K richiesto risulta, allora,

$$K = [\,4 \quad 8 \quad 7 \quad 0\,].$$

iii) [2.5 punti] Per il principio di separazione del regolatore, un regolatore dead-beat per il sistema esiste se e solo se

a) esiste un controllore dead-beat K;

b) esiste uno stimatore dead-beat L.

La a) ha già avuto risposta positiva al punto ii). Si tratta quindi di valutare se esiste uno stimatore dead-beat per il sistema. Valutiamo la osservabilità della coppia (F, H)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che il sistema non è osservabile e la dimensione del sottosistema non osservabile Σ_{no} della corrispondente forma standard di osservazione è pari a 2. Pertando, dal momento che lo spettro di F risulta $\sigma(F) = \{0, 1, 1, 2\}$, gli autovalori del sottosistema non oservabile non possono essere entrambi nulli, il che impedisce l'esistenza di uno stimatore dead-beat (e quindi di un regolatore dead-beat) per il sistema.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione.