COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
18 Settembre 2007

Esercizio 1. Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad -1 \quad 0\,]\, x(t)\end{aligned}$$

Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato il cui errore di stima evolva come combinazione lineare dei soli modi

$$e^{-t}, e^{-2t}.$$

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{2} & a + \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

con a parametro reale.

i) Si valuti, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità asintotica del sistema;

ii) si progetti, per ciascun valore di a in $\mathbb{R}$, $a \neq 0$, un controllo in retroazione $u(t) = K_a x(t)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato presenti solo i modi elementari $(1-a)^t$ e $\delta(t)$.

iii) si determini per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ l'evoluzione forzata dello stato $x_f(t)$ va a zero in un numero finito di passi in corrispondenza alla successione di ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{per } t = 1; \\ -\frac{1}{2}, & \text{per } t = 2; \\ 0, & \text{per } t \neq 1, 2. \end{cases}$$

[Suggerimento: si ricorra alle trasformate zeta e si ricordi l'espressione generica della trasformata zeta di una successione a supporto finito].

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t).\end{aligned}$$

i) Si determino i modi del sistema, discutendone il carattere.

ii) Si determini, se esiste, un controllo in retroazione dallo stato K, tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi la famiglia:

$$\left\{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\right\}.$$

iii) Si determini la funzione di trasferimento $W(s)$ e si valuti la stabilità BIBO del sistema.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria.

- *Studenti IG*: Si dimostri che per un sistema $\Sigma = (F, G, H)$, di dimensione n, a tempo continuo, sono fatti equivalenti:

  1. Σ è stabilizzabile, ovvero ammette un controllore in retroazione K stabilizzante;
  2. la matrice del criterio PBH di raggiungibilità ha rango pieno in corrispondenza ad ogni punto $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(s) \geq 0$;
  3. la matrice F_{22} del sottosistema non raggiungibile di Σ ha tutti gli autovalori a parte reale minore di zero.

- *Studenti IMC*: Dato un sistema $\Sigma = (F, G, H)$, di dimensione n, con m ingressi, e p uscite, si definisca il sistema duale Σ_d e si dimostrino le relazioni fra Σ e Σ_d che riguardano:

  1. raggiungibilità e osservabilità;
  2. forma standard di raggiungibilità-osservabilità e matrice di cambio base;
  3. matrice di trasferimento.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

[4.5 punti] Per quanto detto prima, il sottosistema non osservabile ha un unico autovalore posizionato in -1, compatibile con la richiesta sullo stimatore. Si tratta di scegliere la matrice L dello stimatore, se possibile, in modo tale che la matrice $F + LH$ abbia polinomio minimo $\psi_{F+LH}(s) = (s+1)(s+2)$. Tale polinomio minimo è compatibile con due polinomi caratteristici, ovvero $(s+1)^2(s+2)$ e $(s+1)(s+2)^2$. Siccome il sistema è in forma standard di osservazione, partizioniamo, per comodità, la matrice L in modo consono nella forma

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}.$$

Si verifica che attribuendo alla matrice

$$F_{11} + L_1 H_1$$

polinomio caratteristico $(s+2)^2$, la forma di Jordan di $F + LH$ avrebbe un solo miniblocco di dimensione 2 relativo all'autovalore -2. Pertanto non possiamo che attribuire a $F_{11} + L_1 H_1$ il polinomio caratteristico $(s+1)(s+2)$. Vediamo allora se esiste L_2 tale che $F + LH$ abbia il polinomio minimo desiderato. Posto $L_1 = [a\ b]^T$, si trova

$$F_{11} + L_1 H_1 = \begin{bmatrix} -1+a & -a \\ -1+b & 2-b \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(s) = s^2 + (b-a-1)s + (b+a-2).$$

Imponendo

$$s^2 + (b-a-1)s + (b+a-2) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

si trova $a = 0$ e $b = 4$.

La matrice $F + LH$ diventa allora

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ c & -1-c & -1 \end{bmatrix}.$$

Scegliamo ora, se possibile, $c \in \mathbb{R}$ in modo tale che la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore -1 sia 2, ovvero ci siano due miniblocchi di Jordan di dimensione 1 relativi all'autovalore -1. Si trova

$$-I_3 - (F + LH) = -I_3 - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ c & -1-c & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -c & 1+c & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 1 se e solo se

$$-3(1+c) + c = 0$$

ovvero

$$c = -3/2.$$

Pertanto il problema ha soluzione e lo stimatore cercato è

$$L = [0\ \ 4\ \ -3/2]^T.$$

Esercizio 2. i) [3 punti] È immediato rendersi conto del fatto che la matrice F è triangolare a blocchi e che il blocco diagonale F_{11} (di dimensione 2×2) è una matrice in forma compagna. Pertanto il polinomio caratteristico di F può essere scritto nella forma

$$\Delta_F(z) = \Delta_{F_{11}}(z)\Delta_{F_{22}}(z) = \left[z^2 - \left(a+\frac{1}{2}\right)z + \frac{a}{2}\right](z-1+a) = \left(z-\frac{1}{2}\right)(z-a)(z-1+a).$$

È chiaro, quindi, che tale polinomio risulta di Schur, ovvero ha tutte le radici di modulo minore di 1, se e solo se

$$|a| < 1 \qquad \text{e} \qquad |1-a| < 1.$$

Ciò si verifica se e solo se $0 < a < 1$. Pertanto, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 1$.

ii) [4 punti] Osserviamo, preliminarmente, che il sistema risulta in forma standard di raggiungibilità, perchè è del tipo

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con (F_{11}, g_1) in forma canonica di controllo, e quindi raggiungibile. Di conseguenza posso allocare tutti gli autovalori di F all'infuori di un autovalore che rimane collocato in $1-a$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè i modi del sistema retroazionato siano unicamente i due assegnati è che il polinomio minimo del risultante sistema retroazionato sia $\psi_{F+gK_a}(z) = (z-1+a)z$. Questa condizione è compatibile con due distinti polinomi caratteristici $\Delta_{F+gK_a}(z) = (z-1+a)^2 z$ e $\Delta_{F+gK_a}(z) = (z-1+a)z^2$. Entrambi tali polinomi, in base alla precedente analisi, sono allocabili mediante retroazione. Una soluzione semplice che permette di ottenere $\Delta_{F+gK_a}(z) = (z-1+a)^2 z$ come polinomio caratteristico e $\psi_{F+gK_a}(z) = (z-1+a)z$ come polinomio minimo consiste nell'attribuire alla matrice $F+gK_a$ del sistema retroazionato una struttura diagonale a blocchi, con polinomio caratteristico del blocco $(1,1)$ pari a $(z-1+a)z$ e polinomio caratteristico del blocco $(2,2)$ pari a $z-1+a$. In tal modo è evidente quale sia la forma di Jordan e quindi il polinomio minimo di $F+gK_a$.

Assumendo quindi $K_a = [k_0 \ k_1 \ k_2]$ e imponendo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{2} & a+\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_0 \ k_1 \ k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{2}+k_0 & a+\frac{1}{2}+k_1 & 1+k_2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$K_a = \left[\, \tfrac{a}{2} \quad \tfrac{1}{2} - 2a \quad -1 \,\right].$$

iii) [4 punti] La trasformata zeta della successione di ingresso è

$$U(z) = 1z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z^2}.$$

L'espressione della trasformata zeta dello stato in evoluzione forzata in corrispondenza alla successione di ingresso precedente è

$$\begin{aligned} X_f(z) &= (zI_3 - F)^{-1} g U(z) = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ \frac{a}{2} & z-\left(a+\frac{1}{2}\right) & -1 \\ 0 & 0 & z-1+a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(z) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-a)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ \frac{z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{z-\frac{1}{2}}{z^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z-a)z^2} \\ \frac{1}{(z-a)z} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poichè una successione $v(t), t \in \mathbb{Z}_+$, ha supporto finito se e solo se la sua trasformata zeta $V(z)$ può essere espressa nella forma $V(z) = \frac{n(z)}{z^N}$ per qualche $N \in \mathbb{N}$ e qualche polinomio $n(z) \in \mathbb{R}[z]$

di grado al più N, ne consegue che l'evoluzione forzata di stato $x_f(t)$ è a supporto finito se e solo se $a = 0$.

Esercizio 3. i) [3 punti] La matrice F, di dimensione $n = 4$, è triangolare (superiore) e pertanto i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale principale. Di conseguenza,

$$\Delta_F(s) = s^2(s+1)^2.$$

Per studiare la forma di Jordan e dedurre i modi del sistema, procediamo al calcolo degli autospazi relativi agli autovalori 0 e -1, rispettivamente U_0 e U_{-1}. Per quanto riguarda U_0, risulta

$$\dim\ker U_0 = n - \operatorname{rank}(0 \cdot I_n - F) = 4 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

per cui vi è un unico miniblocco di Jordan relativo all'autovalore nullo. Analogamente, si ottiene

$$\dim\ker U_{-1} = n - \operatorname{rank}(-1 \cdot I_n - F) = 4 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1,$$

e quindi c'è un unico miniblocco di Jordan relativo anche al secondo autovalore del sistema.
La forma di Jordan che ne risulta è la seguente:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a cui risultano associati i modi $m_1(t) = 1$ (limitato), $m_2(t) = t$ (divergente), $m_3(t) = e^{-t}$ (convergente), e $m_4(t) = te^{-t}$ (convergente).

ii) [3.5 punti] Il sistema risulta non completamente raggiungibile, caratteristica verificabile dal calcolo della matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = [\, g | Fg | F^2g | F^3g \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango pari a 3. D'altronde, (F, G) è una forma standard di raggiungibilità in quanto la struttura delle matrici è consistente con la forma standard e la coppia $(F_{11}, g_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ è raggiungibile. Infatti (F_{11}, g_1) è in forma canonica di controllo, con polinomio caratteristico $\Delta_{F_{11}}(s) = s^2(s+1)$. È importante evidenziare che l'autovalore del sottosistema non raggiungibile risulta pari a -1, condizione compatibile con quanto richiesto dal problema. Partizioniamo la matrice di retroazione in modo conforme alla partizione a blocchi della forma standard di raggiungibilità: $K = [K_1 | K_2] = [\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \mid k_4 \,]$. Rimangono allora da allocare gli autovalori della matrice del sottosistema raggiungibile in -1, ossia la retroazione deve agire sul sistema in modo da avere $\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s) = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$ come polinomio caratteristico di $F_{11} + g_1K_1$. La struttura in forma canonica di controllo permette di scrivere direttamente i coefficienti della matrice di retroazione a partire dalla ultima riga di $F_{11} + g_1K_1$ che presenta i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato. Si ottiene:

$$K_1 = [\, -1 \quad -3 \quad -2 \,]$$

e, quindi,

$$K = [\, -1 \quad -3 \quad -2 \mid k_4 \,],$$

con k_4 arbitrario.
Perchè il sistema retroazionato abbia tutti e soli i modi $\left\{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\right\}$ la forma di Jordan di $F+gK$ deve essere

$$J_K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Scegliendo $K = [\,-1 \quad -3 \quad -2 \mid -2\,]$, la matrice di stato del sistema retroazionato risulta avere struttura diagonale a blocchi

$$F_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a cui corrisponde proprio la forma di Jordan desiderata.

iii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema $W(s)$ coincide con la funzione di trasferimento del suo sottosistema raggiungibile, che in questo caso corrisponde a:

$$\Sigma_1 = (F_{11}, g_1, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\,0 \quad 0 \quad 1\,] \right).$$

Inoltre essendo Σ_1 in forma canonica di controllo, i coefficienti di numeratore e denominatore della sua funzione di trasferimento $W(s)$ si ricavano rispettivamente dall'ultima riga delle matrici H_1 e F_{11}:

$$W(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{s^2}{s^3 + s^2} = \frac{1}{s+1}.$$

Per quanto concerne lo studio della BIBO stabilità, la funzione di trasferimento $W(s)$ che si ottiene a valle della cancellazione zero/polo relativa al polo doppio in zero presenta un unico polo in -1, il che garantisce la BIBO stabilità del sistema.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione.