COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
23 Marzo 2007 - A.A. 2006/2007

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + [g_1|g_2]\,u(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determini, se possibile, un controllore in retroazione dal solo secondo ingresso g_2 in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia asintoticamente stabile ed abbia come modi elementari esclusivamente esponenziali puri (i.e. del tipo $e^{\lambda_i t}$).

ii) Si determini, se possibile, un controllore in retroazione dal solo primo ingresso g_1 in modo tale che il risultante sistema retrazionato abbia polinomio caratteristico $(s+1)^3$.

iii) Si determini, se possibile, un controllore in retroazione da entrambi gli ingressi in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi elementari esclusivamente e^{-t} e $t \cdot e^{-t}$.
[Suggerimento: si cerchi di attribuire alla matrice $(F + GK)$ una struttura triangolare a blocchi (superiore).]

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} x(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 1\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

dove λ è un parametro reale.

i) Per $\lambda = 0$ si valuti l'evoluzione (libera) d'uscita $y_\ell(t), t \in \mathbb{Z}_+$, in corrispondenza al generico stato iniziale $x(0) = [\,x_{10} \quad x_{20} \quad x_{30}\,]^T$.

ii) Si determini, per ciascun valore reale di λ, una matrice $G \in \mathbb{R}^{3 \times m}$, con m, il numero di ingressi, minimo possibile, in modo tale che la coppia (F, G) sia raggiungibile.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 1 \quad a\,]\, x(t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si calcolino i sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità in k passi per ogni $k \in \mathbb{N}$ e si discuta la raggiungibilità e controllabilità a zero del sistema.

ii) Si determini, se esiste, un controllore dead-beat.

iii) Si discuta, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'osservabilità e la ricostruibilità del sistema.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Dato un modello di stato a tempo continuo, tempo invariante,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{aligned}$$

si definisca il concetto di punto di equilibrio del sistema in corrispondenza ad ingresso costante e si illustri il processo di linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio e le ipotesi necessarie per poter effettuare la linearizzazione.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3.5 punti] Si verifica che la coppia (F, g_2) è raggiungibile, attraverso il calcolo della matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R}_2 = [g_2|Fg_2|F^2g_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

È quindi possibile allocare liberamente gli autovalori della matrice $F + g_2k_2$ del sistema retroazionato dal solo secondo ingresso e quindi, in particolare, trovare una soluzione al problema proposto, attribuendo al polinomio caratteristico tre radici reali negative e distinte. Scegliamo, ad esempio:

$$p(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6.$$

Posto $k_2 = [a \quad b \quad c]$, il calcolo del polinomio caratteristico della matrice $F + g_2k_2$ fornisce:

$$\Delta_{F+g_2k_2}(s) = s^3 + (1-b-c)s^2 + (-1+a-2b+c)s + (2+2a-c).$$

Imponendo $\Delta_{F+g_2k_2}(s) = p(s)$, si trova $a = 2$, $b = -5$, e $c = 0$, da cui segue:

$$k_2 = [2 \quad -5 \quad 0].$$

ii) [2.5 punti] Si nota che la coppia (F, g_1) non è raggiungibile, giacché

$$\mathcal{R}_1 = [g_1|Fg_1|F^2g_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango $2 < 3$. Peraltro, una volta verificata la raggiungibilità della coppia $(F_{11}, g_{11}) = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, è immediato rendersi conto del fatto che la coppia (F, g_1) è in forma standard di raggiungibilità con matrice F_{22} del sistema non raggiungibile pari a $F_{22} = [-2]$. Il polinomio caratteristico relativo al sottosistema non raggiungibile risulta pertanto $\Delta_{F_{22}}(s) = (s+2)$ e non è un divisore del polinomio richiesto $p(s) = (s+1)^3$. Non esiste pertanto controllore in retroazione dal primo ingresso che attribuisca alla matrice del sistema retroazionato il polinomio caratteristico desiderato.

iii) [4.5 punti] Il calcolo della matrice di raggiungibilità porge:

$$\mathcal{R} = [G|FG|F^2G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pertanto la coppia (F, G) è raggiungibile, e il polinomio caratteristico del sistema retroazionato $\Delta_{F+GK}(s)$ è arbitrariamente allocabile attraverso una opportuna matrice di retroazione K. Per soddisfare il vincolo sui modi, occorre e basta imporre che il polinomio minimo della matrice $F+GK$ sia $\psi_{F+GK}(s) = (s+1)^2$ o, equivalentemente, che la forma di Jordan di $F+GK$ sia

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per ottenere tale polinomio minimo è necessario (ma non sufficiente) che il polinomio caratteristico sia:

$$\Delta_{F+GK}(s) = (s+1)^3.$$

Considerando una generica matrice di retroazione scritta in forma parametrica,

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$F+GK = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 - 1 & c_1 \\ a_2 + 1 & b_2 + 1 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 - 2 \end{bmatrix}.$$

Imponendo alla matrice $F+GK$ una struttura triangolare a blocchi:

$$F+GK = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} \\ 0 & \bar{F}_{22} \end{bmatrix},$$

il polinomio caratteristico risulta espresso nella forma $\Delta_{F+GK}(s) = \Delta_{\bar{F}_{11}}(s) \cdot \Delta_{\bar{F}_{22}}(s)$. Per ottenere $\Delta_{F+GK}(s) = (s+1)^3$ possiamo quindi imporre $\Delta_{\bar{F}_{11}}(s) = (s+1)^2$ e $\Delta_{\bar{F}_{22}}(s) = (s+1)$. Assumendo, pertanto, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$ (per avere struttura triangolare a blocchi), otteniamo $a_1 = -3$, $b_1 = -3$ (dalla condizione su $\Delta_{\bar{F}_{11}}(s)$), e $c_2 = 1$ (dalla condizione su $\Delta_{\bar{F}_{22}}(s)$), mentre c_1 è un parametro libero.

Per garantire che i modi di $F+GK$ siano quelli richiesti, occorre valutare se esistono scelte del parametro c_1 che attribuiscano alla matrice $F+GK$ il polinomio minimo $\psi_{F+GK}(s) = (s+1)^2$ o, equivalentemente, che attribuiscano all'autovalore -1 la molteplicità geometrica $s_{-1} = 2$. L'autospazio relativo all'autoavalore -1 è

$$\ker(-1I_3 - (F+GK)) = \ker \begin{bmatrix} 2 & 4 & -c_1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed esso ha dimensione 2 solo per $c_1 = -2$. La matrice di retroazione K risulta pertanto

$$K = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. i) [2.5 punti] Per $\lambda = 0$, la matrice F del sistema diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo delle prime potenze di F, ovvero $F^2, F^3, ..$ evidenzia come $F^t = F$ per ogni intero $t \geq 1$ (si tratta di una matrice *idempotente*, ovvero le cui potenze sono tutte uguali). A questo punto il calcolo dell'espressione dell'uscita nei diversi istanti $t \in \mathbb{Z}_+$ diventa immediata e porta:

$$\begin{aligned}
y(0) &= Hx(0) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} = x_{10} + x_{30}, \\
y(t) &= HF^t x(0) = HFx(0) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \\
&= [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} = x_{20}, \qquad t \geq 1.
\end{aligned}$$

ii) [3.5 punti] Il polinomio caratteristico della matrice F risulta $\Delta_F(z) = (z - \lambda)^2 (z - 1)$. Per valutare il minimo numero di ingressi necessari per rendere il sistema raggiungibile è necessario valutare il massimo numero di miniblocchi di Jordan relativi al medesimo autovalore. Per determinare questa informazione distinguiamo due casi: (a) $\lambda = 1$; (b) $\lambda \neq 1$.

(a) Per $\lambda = 1$ la matrice F risulta in forma di Jordan con due miniblocchi relativi al medesimo (e unico) autovalore 1:

$$F = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso il minimo numero di colonne della matrice G necessario per avere raggiungibilità è $m = 2$. Il Corollario al criterio PBH per matrici F in forma di Jordan ci permette di dire immediatamente che le matrici G, con due colonne, che rendono il sistema raggiungibile sono tutte e sole quelle la cui seconda e terza riga sono linearmente indipendenti tra loro. Una scelta immediata è allora

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Per $\lambda \neq 1$ la matrice F non è in forma di Jordan e presenta due autovalori distinti. Vediamo qual'é la forma di Jordan di F. Si trova che

$$\dim \ker(F - \lambda I_3) = \dim \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Pertanto la molteplicità geometrica dell'autovalore λ è 2 e ciò assicura che nella forma di Jordan di F ci siano due miniblocchi (di dimensione unitaria) relativi all'autovalore λ, ovvero

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto anche in questo caso il minimo numero di colonne della matrice G necessario per avere raggiungibilità è $m = 2$. Se consideriamo una generica matrice

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \\ g_5 & g_6 \end{bmatrix}$$

e imponiamo che

$$\begin{aligned} \text{rank}\,[\,\lambda I_3 - F \quad | \quad G\,] &= 3, \\ \text{rank}\,[\,1 I_3 - F \quad | \quad G\,] &= 3, \end{aligned}$$

troviamo, tra le infinite soluzioni possibili, ad esempio:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. i) [4 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$\begin{aligned} X_1^R &= \text{Im}G = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\ X_2^R &= \text{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\ X_3^R &= \text{Im}\,[\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Pertanto il sistema è raggiungibile (in tre passi).

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned} X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \text{Im}G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_2 - x_3 = 0 \text{ e } x_1 + 2x_2 = +x_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 = x_2 \text{ e } x_1 = -x_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle, \\ X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \text{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle .
\end{aligned}
$$

Infine, poichè $X_3^R = \mathbb{R}^3$ certamente $X_3^C = \mathbb{R}^3$ e quindi il sistema (che è raggiungibile in tre passi) è pure controllabile a zero in tre passi.

ii) [3 punti] In base all'analisi condotta al punto i) sappiamo che tale coppia è raggiungibile e controllabile a zero. Pertanto esiste il controllore dead-beat. Se introduciamo la matrice $K = [\, a \quad b \quad c \,]$ in forma parametrica, otteniamo

$$
F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1+a & 2+b & c \\ a & b & 1+c \end{bmatrix}
$$

il cui polinomio caratteristico è

$$
\Delta_{F+GK}(z) = z^3 - (3+b+c)z^2 + (1+b+2c)z + (1-a+b+c).
$$

Imponendo $\Delta_{F+GK}(z) = z^3$, si trova si trova $a = -2, b = -5$ e $c = 2$, che corrisponde a

$$
K = [\, -2 \quad -5 \quad 2 \,] .
$$

iii) [2.5 punti] Il calcolo della matrice di osservabilità porta a

$$
\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & a-1 \\ 3 & 7 & a-2 \end{bmatrix}
$$

e il calcolo di $\det \mathcal{O} = -4a$ evidenzia come la matrice sia non singolare per ogni $a \neq 0$. Pertanto il sistema è osservabile per ogni $a \neq 0$. Poichè F non ha autovalori nulli, ne consegue che è ricostruibile se e solo se è osservabile e pertanto per ogni $a \neq 0$.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, a pagg. 38-42.