COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
23 Luglio 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= F\mathbf{x}(t) + Gu(t) &= \begin{bmatrix} a^2 - \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & a - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= H\mathbf{x}(t) &= [\,0 \quad 1\,]\, \mathbf{x}(t), \qquad\qquad t \in \mathbb{R}_+,
\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e si studino stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema.

Assumendo, nel seguito dell'esercizio, $a = -1/2$,

ii) si determini, ricorrendo alle trasformate di Laplace e se esiste, un segnale di ingresso che produce l'evoluzione forzata di stato

$$\mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) \delta_{-1}(t) \\ \\ t \cdot e^{-2t}\ \delta_{-1}(t) \end{bmatrix};$$

iii) si determini l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alla condizione iniziale generica $\mathbf{x}(0) = [\,x_{10} \quad x_{20}\,]^T$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

i) Si determinino i sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità a zero in k passi per $k = 1, 2, \ldots$.

ii) Si determini, ove possibile e al variare del parametro reale a, un ingresso di controllo che mandi a zero lo stato iniziale $x(0) = [\,1 \quad 1 + a \quad 1\,]^T$ nel minimo numero di passi.

Esercizio 3. Dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t),
\end{aligned}$$

i) si progetti, se possibile, uno stimatore il cui errore di stima converga per $t \to +\infty$ come $\left(\frac{1}{2}\right)^t$;

ii) si progetti, se possibile, un regolatore dead-beat.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui l'ingresso di controllo/lo stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si enunci il Lemma di Heymann e lo si illustri con riferimento al seguente esempio

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad G = [\, g_1 \quad g_2 \quad g_3 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3.5 punti] Distinguiamo a seconda che i due autovalori della matrice F, $\lambda_1 = a^2 - \frac{1}{4}$ e $\lambda_2 = a - \frac{1}{2}$, siano distinti o coincidenti. Se $\lambda_1 = \lambda_2$, ovvero $a^2 - a + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, ovvero $a = \frac{1}{2}$, allora è immediato rendersi conto del fatto che la matrice F si trova già in forma di Jordan e presenta un solo miniblocco di dimensione 2 relativamente all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$F = J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se, invece, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovvero $a \neq \frac{1}{2}$, allora la matrice F è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} a^2 - \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Per quanto concerne lo studio della stabilità, è immediato rendersi conto del fatto che abbiamo stabilità asintotica se e solo se

$$a^2 - \frac{1}{4} < 0 \qquad a - \frac{1}{2} < 0,$$

ovvero per $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$. Per $a = \frac{1}{2}$, come abbiamo visto, abbiamo un autovalore nullo di molteplicità 2 nel polinomio minimo e pertanto instabilità. Per $a = -\frac{1}{2}$ abbiamo un autovalore semplice in 0 ed uno in -1 e quindi in questo caso si ha stabilità semplice. Per i valori di a esterni all'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ abbiamo instabilità.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(s) \quad = \quad H(sI_2 - F)^{-1}g = \frac{1}{s - a + \frac{1}{2}}.$$

Da ciò segue subito che il sistema è BIBO stabile se e solo se $a < \frac{1}{2}$. Pertanto per $a \leq -\frac{1}{2}$ il sistema è BIBO stabile senza essere asintoticamente stabile.

ii) [4 punti] Per $a = -1/2$ la matrice del sistema diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il vettore di stato assegnato ha trasformata di Laplace

$$X_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} \\ \\ \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}.$$

Si trova

$$X_f(s) = (sI_2 - F)^{-1} g U(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s(s+1)} \\ \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} U(s).$$

Pertanto imponendo

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} \\ \\ \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s(s+1)} \\ \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} U(s)$$

si verifica che l'unica soluzione al problema è

$$U(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$$

che corrisponde a

$$u(t) = (1-t)e^{-2t}\delta_{-1}(t).$$

iii) [4.5 punti] Come abbiamo visto al punto precedente, per $a = -\frac{1}{2}$ la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e presenta potenza generica

$$F^{2k} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -F, \qquad \text{per } k > 0$$

e

$$F^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = F, \qquad \text{per } k > 0.$$

Di conseguenza,

$$e^{Ft} = \sum_{i=0}^{+\infty} F^i \frac{t^i}{i!} = I_2 + \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^{i+1} F \frac{t^i}{i!} = I_2 - \left(\sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i \frac{t^i}{i!} \right) \cdot F = I_2 - \left(e^{-t} - 1\right) \cdot F = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix},$$

e la generica evoluzione libera assume la forma

$$\mathbf{x}_\ell(t) = e^{Ft}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{10} + x_{20}(1 - e^{-t}) \\ x_{20}e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im} G = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\
X_3^R &= \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \neq \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Pertanto il sistema non è raggiungibile e il sottospazio raggiungibile coincide con $X_2^R = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$.

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im} G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_1}{2} - x_2 \\ -\frac{x_1}{2} + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \frac{x_1}{2} - x_2 = -\frac{x_1}{2} + 2x_2 + x_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 - 3x_2 = x_3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \rangle, \\
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[G \quad FG]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 - \frac{x_1}{2} \\ \frac{x_1}{2} + x_3 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Certamente $X_3^C = \mathbb{R}^3$ e quindi il sistema (che non è raggiungibile) è controllabile a zero in due passi.

ii) [4 punti] Poiché il sistema è sempre controllabile a zero esiste sempre un ingresso di controllo che porta a zero lo stato in un numero finito di passi (al più 2) qualunque sia il valore di a. Si tratta quindi di valutare per quali valori del parametro a lo stato iniziale appartiene a X_1^C e per quali valori esso appartiene a $X_2^C \setminus X_1^C$. Nel primo caso troveremo un ingresso di controllo che porta lo stato a zero in un passo, nel secondo caso troveremo un ingresso che porta lo stato a zero in 2 passi (e questo è il minimo numero di passi in cui ciò è possibile).

Chiaramente lo stato iniziale $x(0) = [1 \quad 1+a \quad 1]^T$ appartiene a X_1^C se e solo se $a = -1$. Per tale valore di a, si trova $x(0) = [1 \quad 0 \quad 1]^T \in X_1^C$ e impostando l'equazione

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{x}(1) = F\mathbf{x}(0) + gu(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(0),
\end{aligned}$$

si trova $u(0) = -1/2$. Viceversa per $a \neq -1$ lo stato iniziale $x(0) = [1 \quad 1+a \quad 1]^T$ appartiene a $X_2^C \setminus X_1^C$ e impostando l'equazione

$$0 = \mathbf{x}(2) = F^2\mathbf{x}(0) + [\,g \quad Fg\,] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1+a \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2+a \\ 3/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u(1)-u(0) \\ u(1)+3u(0) \end{bmatrix},$$

si trova $u(0) = \frac{a}{4} - \frac{1}{4}, u(1) = -\frac{3a}{4} - \frac{3}{4}$.

Esercizio 3. i) [3.5 punti] La specifica richiesta equivale a chiedere che l'evoluzione (libera) dell'errore di stima $e(t)$, per valori molto grandi di t (e quindi asintoticamente), possa essere descritta ricorrendo al solo modo $(\frac{1}{2})^t$. In altre parole, è richiesto che i modi di $(F + LH)$ soddisfino i seguenti requisiti:

1. tra di essi ci sia il modo $(1/2)^t$;
2. qualsiasi altro modo $m(t)$ sia asintoticamente irrilevante rispetto a $(1/2)^t$, nel senso che

$$\frac{m(t)}{(1/2)^t} \to 0 \quad \text{per } t \to \infty,$$

ovvero $(1/2)^t$ è il modo dominante.

È immediato verificare che il sistema è in forma standard di osservazione e l'unico autovalore del sottosistema non osservabile è 0. Infatti, le matrici (F, H) partizionate secondo la struttura di forma standard di osservazione evidenziano un sottosistema $(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ osservabile, in quanto $\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango pari a 2, e $F_{22} = [0]$.

Tale situazione è compatibile con le due condizioni richieste per gli autovalori di $F + LH$, in quanto è possibile allocare, ad esempio, gli autovalori di F_{11} in 0 e 1/2, il che fornisce (tenuto conto del fatto che l'autovalore non allocabile di F_{22} è 0) una possibile soluzione al problema, portando ad uno spettro complessivo pari a

$$\sigma(F + LH) = \{0, 0, 1/2\}.$$

In questo modo, infatti si hanno due modi impulsivi, a supporto finito, in aggiunta al modo dominante $(1/2)^t$.

Partizionando la matrice L in modo conforme alla forma standard

$$L = \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \hline L_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \hline \ell_3 \end{array}\right],$$

il problema è ora di fare in modo che la matrice $F_{11} + L_1 H_1$ presenti due autovalori distinti in 0 e 1/2. Si ottiene, con facili calcoli,

$$F_{11} + L_1 H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\ell_1 & \ell_1 \\ -1+\ell_2 & -1+\ell_2 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava la seguente espressione per il polinomio caratteristico

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z) = \begin{vmatrix} z+1-\ell_1 & -\ell_1 \\ 1-\ell_2 & z+1-\ell_2 \end{vmatrix} = z^2 + (2-\ell_1-\ell_2)z + (1-\ell_2).$$

Perchè il polinomio $\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z)$ sia pari al polinomio desiderato $p(z) = z\,(z-1/2)$ occorre e basta che $\ell_1 = \frac{3}{2}$ e $\ell_2 = 1$. Il parametro ℓ_3 rimane, invece, completamente libero. Lo stimatore L cercato risulta, quindi,

$$L = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \ell_3 \end{bmatrix},$$

con ℓ_3 arbitrario.

ii) [4 punti] Per il principio di separazione del regolatore, un regolatore dead-beat per il sistema esiste se e solo se

a) esiste K tale che $F + GK$ sia nilpotente;

b) esiste H tale che $F + LH$ sia nilpotente.

Per quanto riguarda il punto b), si parte dalle considerazioni di cui al punto i), secondo cui la coppia (F, H) è non osservabile, con autovalore del sistema non osservabile unico e pari a 0. Si procede, pertanto come in precedenza in modo da allocare anche i rimanenti autovalori di $F + LH$ in zero, il che coincide con l'allocazione in zero degli autovalori di $F_{11} + L_1H_1$.

Si ha pertanto che il polinomio caratteristico $\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z) = z^2 + (2-\ell_1-\ell_2)z + (1-\ell_2)$ deve essere pari a $p(z) = z^2$. Si ottiene $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = 1$, con ℓ_3 (ancora) completamente libero. La matrice L dello stimatore dead-beat risulta

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ell_3 \end{bmatrix},$$

con ℓ_3 arbitrario.

Si tratta ora di valutare se esiste un controllore dead-beat per il sistema. Valutiamo la raggiungibilità del sistema. La matrice di raggiungibilità risulta $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e ha rango pari a 2. Pertanto il sistema non è completamente raggiungibile. Per capire quale sia l'autovalore del sottosistema non raggiungibile (di dimensione 1) si può ricorrere al criterio PBH di raggiungibilità. Il calcolo della matrice PBH porge

$$[\lambda I - F | G] = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 1 & \lambda+1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & | & 1 \end{bmatrix}$$

e in corrispondenza degli autovalori 0 e -1 si ha:

$$\operatorname{rank}\left([\lambda I - F|G]_{\lambda=0}\right) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rank}\left([\lambda I - F|G]_{\lambda=-1}\right) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & -1 & | & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

Si deduce che l'autovalore del sottosistema non raggiungibile è 0, unico valore per cui la matrice PBH scende di rango. Attraverso una retroazione K è pertanto possibile allocare gli autovalori in modo da ottenere come spettro per il sistema retroazionato $\sigma(F+GK) = \{0, 0, 0\}$, costruendo così un controllore dead-beat.

In corrispondenza al un generico controllore in forma parametrica $K = [k_1\ k_2\ k_3]$ si ottiene:

$$F + GK = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \,] = \begin{bmatrix} -1-k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1+k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico assume la seguente espressione

$$\Delta_{F+GK}(z) = \det \begin{bmatrix} z+1+k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & z+1 & 0 \\ -1-k_1 & -k_2 & z-k_3 \end{bmatrix} = z\left(z^2 + (2+k_1-k_3)z + (1+k_1-k_2-k_3)\right).$$

Affinchè il polinomio caratteristico $\Delta_{F+GK}(z)$ sia pari $p(z) = z^3$, ossia $F+GK$ sia nilpotente, deve essere:

$$\begin{cases} k_3 = 2 + k_1, \\ k_2 = 1 + k_1 - k_3 = -1. \end{cases}$$

Ciò porta alla seguente struttura per la matrice di retroazione

$$K = [k_1 \quad -1 \quad 2+k_1]\,,$$

con k_1 arbitrario.

Teoria. [4 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione. In questo caso specifico possiamo, ad esempio, rendere il sistema raggiungibile dal secondo ingresso scegliendo

$$Q = [\, g_2 \quad Fg_2 \quad g_3 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In tal modo si trova come matrice di pre-retroazione

$$M_2 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$