COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
3 Aprile 2007 - A.A. 2006/2007

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \\
y(k) &= Hx(k) = [\,1 \quad 0 \quad 1\,]\, x(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}
$$

con a parametro reale.

Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e si studi la stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema, precisandone i modi.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$
\dot{x}(t) = Fx(t) + [g_1 g_2]\, u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.
$$

i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione stabilizzante dal solo primo ingresso g_1 che attribuisca al risultante sistema retroazionato modi esponenziali puri.

ii) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo secondo ingresso g_2 che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $p(s) = (s+1)^2(s+2)$.

iii) Si progetti un controllo in retroazione K che faccia uso di entrambi gli ingressi e attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $p(s) = (s+1)^3$. Si utilizzi opportunamente il Lemma di Heymann in modo da rendere il sistema raggiungibile dal secondo ingresso. In corrispondenza a tale controllore, si valutino i modi della matrice $F + GK$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

i) Si dimostri che esiste uno stimatore dead-beat L per il sistema e se ne costruisca uno che attribuisca alla matrice $F + LH$ indice di nilpotenza minimo possibile.

ii) Si scrivano le equazioni del sistema ottenuto per interconnessione del precedente sistema con un regolatore per lo stesso.

iii) Si dimostri che esiste un regolatore dead-beat per il precedente sistema e se ne costruisca uno.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Dato un sistema $\Sigma = (F, G, H)$ e il corrispondente sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$, si enuncino e si dimostrino le proposizioni sulla raggiungibilità/non raggiungibilità di Σ_K a partire dalle corrispondenti proprietà del sistema Σ.

SOLUZIONI

Esercizio 1. [5 punti] Distinguiamo a seconda che i tre autovalori della matrice F, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 - a^2, \lambda_3 = 1 - a$, siano distinti o coincidenti.

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, ovvero $a = 0$, il calcolo dell'autospazio relativo all'unico autovalore (di molteplicità algebrica 3) porge

$$\ker(1I_3 - F) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ed esso ha dimensione (la molteplicità geometrica dell'autovalore 1) 2. Ne consegue che nella forma di Jordan F_J sono presenti due miniblocchi relativi a $\lambda_1 = 1$, cioé

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso ($a = 0$) si ha instabilità essendo i modi associati alla forma di Jordan: 1 (limitato), $\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} 1^{k-1} = k$ (divergente).

Se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ovvero $a = 1$, il calcolo dell'autospazio relativo all'autovalore 0 (di molteplicità algebrica 2) porge

$$\ker(0I_3 - F) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

la cui dimensione è 1. Poiché la molteplicità geometrica dell'autovalore 0 è 1, nella forma di Jordan F_J è presente un unico miniblocco relativo a $\lambda_2 = 0$, cioé

$$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso ($a = 1$) si ha stabilità semplice essendo i modi associati alla forma di Jordan: $\delta(k)$ (convergente), $\delta(k-1)$ (convergente), 1 (limitato).

Infine, se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, ovvero $a \neq 1, 0$, la matrice F risulta diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è diagonale

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a \end{bmatrix}.$$

I modi associati alla forma di Jordan, e quindi alla F, sono $(1 - a^2)^k$, $(1 - a)^k$ e 1 (limitato). Per studiare la stabilità del sistema, occorre discutere il modulo dei due autovalori $1 - a^2$ e $1 - a$

al variare di a. Risulta $|1-a^2| < 1$ per $-\sqrt{2} < a < 0$ e $0 < a < \sqrt{2}$, mentre $|1-a^2| = 1$ per $a = \pm\sqrt{2}$ e $a = 0$ (caso già considerato). Inoltre, risulta $|1-a| < 1$ per $0 < a < 2$, mentre $|1-a| = 1$ per $a = 2$ e $a = 0$ (caso già considerato).
In questo caso ($a \neq 0$, $a \neq 1$) si ha stabilità semplice per $0 < a < 1$ e $1 < a \leq \sqrt{2}$, mentre per $a \notin [0, \sqrt{2}]$ si ha instabilità.

Per quanto riguarda la stabilità BIBO, il calcolo della funzione di trasferimento del sistema porta a

$$\begin{aligned}
W(z) = H\,(zI_3 - F)^{-1}\,G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z-(1-a^2) & 0 \\ 0 & -1 & z-(1-a) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(z-1)(z-1+a^2)(z-1+a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (z-1)(z-1+a^2) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{z-1+a}.
\end{aligned}$$

Per effetto delle cancellazioni si ha stabilità BIBO (senza avere stabilità asintotica) se e solo se $0 < a < 2$.

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Il calcolo della matrice di raggiungibilità per la coppia (F, g_1) porge

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} g_1 & Fg_1 & F^2 g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 3. Il sistema è quindi raggiungibile dal primo ingresso ed è possibile allocare arbitrariamente tramite una matrice di retroazione k_1 il polinomio caratteristico della matrice $F + g_1 k_1$. In particolare, è possibile selezionare una matrice k_1 che attribuisca a $F + g_1 k_1$ un polinomio caratteristico $\Delta_{F+g_1k_1}(s)$ con soluzioni reali negative e distinte. Scegliamo come polinomio caratteristico il polinomio

$$p(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6.$$

Se attribuiamo alla matrice di retroazione k_1 la forma parametrica $k_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
F + g_1 k_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ a & b & c-2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

da cui

$$\Delta_{F+g_1k_1} = s^3 + (2-c)s^2 + (-2-b)s + (-a+2c-4).$$

Imponendo $\Delta_{F+g_1k_1} = p(s)$ si ottiene

$$\begin{cases} -c+2=6 \\ -2-b=11 \\ -a+2c-4=6 \end{cases},$$

che porge

$$k_1 = [\,-18 \quad -13 \quad -4\,]\,.$$

ii) [3.5 punti] Il calcolo della matrice di raggiungibilità per la coppia (F, g_2) porge

$$\mathcal{R}_2 = [\,g_2 \quad Fg_2 \quad F^2g_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango pari a 2. Pertanto la coppia (F, g_2) non è raggiungibile ed il sottospazio non raggiungibile ha dimensione unitaria.

Si chiede che la matrice retroazionata $F + g_2k_2$ abbia come autovalori $-1, -1, -2$, pertanto si tratta di vedere quale è l'autovalore del sottosistema non raggiungibile.

Dal test PBH, oppure osservando che il sistema è in forma standard di raggiungibilità (la coppia $(\bar{F}_{11}, \bar{g}_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ è raggiungibile, essendo in forma canonica di controllo) si deduce che $\lambda = -2$ è l'autovalore del sottosistema non raggiungibile ($\bar{F}_{22} = [-2]$). Esiste quindi il controllore richiesto.

Si tratta quindi di allocare il polinomio caratteristico del sottosistema raggiungibile in $(s+1)^2$, il che si ottiene ragionando direttamente sulla forma canonica di controllo evidenziata con una matrice di retroazione della forma $k_2 = [\,-3 \quad -2 \quad *\,]$. Una scelta possibile per k_2 risulta pertanto la seguente

$$k_2 = [\,-3 \quad -2 \quad 0\,]\,.$$

iii) [5 punti] La matrice di raggiungibilità del sistema risulta

$$\mathcal{R} = [\,g_1 \quad g_2 \quad Fg_1 \quad Fg_2 \quad F^2g_1 \quad F^2g_2\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

ovviamente di rango 3. Utilizziamo il lemma di Heymann per costruire una matrice M_2 di pre-retroazione che renda il sistema retroazionato $(F + GM_2, G)$ raggiungibile dal solo secondo ingresso (i.e. la coppia $(F + GM_2, g_2)$ deve essere raggiungibile). Si costruiscono dapprima la matrice Q_2 selezionando in modo oppportuno le colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{R}$, e la matrice S_2 ad essa correlata

$$Q_2 = [\,g_2 \quad Fg_2 \quad g_1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q_2^{-1} \qquad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta

$$M_2 = S_2 Q_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e operando la pre-retroazione si ottiene

$$F + GM_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il sistema pre-retroazionato risulta raggiungibile dal secondo ingresso e attraverso una matrice parametrica $k_2 = [\, a \quad b \quad c \,]$, si ottiene

$$F + GM_2 + g_2 k_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2+a & b & 1+c \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico risulta

$$\Delta_{F+GM_2+g_2k_2} = s^3 + (2-b)s^2 + (-2-a-2b)s + (-2a-c-5)$$

Eguagliando il polinomio caratteristico richiesto $p(s) = (s+1)^3 = s^3+3s^2+3s+1$ a $\Delta_{F+GM_2+g_2k_2}$, si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} 2-b = 3 \\ -2-a-2b = 3 \\ -2a-c-5 = 1 \end{cases},$$

che fornisce

$$k_2 = [\, -3 \quad -1 \quad 0 \,].$$

La matrice di retroazione complessiva risulta:

$$K = M_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di stato del sistema retroazionato prende la forma

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

e presenta come autovalore unico $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica $n = 3$. Valutiamo la molteplicità geometrica s di λ, che risulta pari a 1, in quanto

$$s = \dim\ker(-I_3 - (F+GK)) = \ker \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3-2 = 1.$$

Vi è pertanto un unico miniblocco di Jordan relativo all'autovalore e la forma di Jordan corrispondente risulta

$$(F + GK)_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

che fornisce come modi e^{-t}, te^{-t}, $\frac{t^2}{2}e^{-t}$.

Esercizio 3. i) [4 punti] La coppia (F, H) ha una struttura partizionata a blocchi in modo conforme a quello di una forma standard di osservazione, e poiché la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

è osservabile, giacché $\mathcal{O}_1 := \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 F_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ è non singolare, la coppia (F, H) è proprio in forma standard di osservabilità.

Essendo $F_{22} = [0]$, la coppia (F, H) è ricostruibile e quindi esiste uno stimatore dead-beat. Posto $L = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \hline c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \end{bmatrix}$ al fine di garantire che $\Delta_{F+LH}(z) = z^3$ è sufficiente selezionare $L_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ in modo tale che

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z) = \det \begin{bmatrix} z & 1-a \\ -1 & z+2-b \end{bmatrix} = z^2 + (2-b)z + (1-a) = z^2.$$

Si trova, allora,

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

e, corrispondentemente, la matrice $F + LH$ diventa

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+c & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché è evidente che $F + LH \neq 0_{3\times 3}$, non si può avere indice di nilpotenza 1. Ci chiediamo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F + LH$ abbia indice di nilpotenza pari a 2.
Vista la semplicità della matrice $F + LH$ è possibile calcolare $(F + LH)^2$ in funzione di c e imporre

$$(F + LH)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1+c & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3\times 3}$$

da cui segue $c = -1$.
Pertanto

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

è lo stimatore dead-beat che attribuisce a $F + LH$ indice di nilpotenza minimo, pari a 2.

ii) [2 punti] Le equazioni dello stimatore sono

$$\hat{\Sigma} : \quad \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L\left(y(t) - H\hat{x}(t)\right)$$

e del controllore dallo stato stimato

$$\Sigma_K : \quad u(t) = v(t) + K\hat{x}(t)$$

Pertanto, considerando come vettore di stato per il sistema interconnesso $\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$, si trova

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F + GK + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

iii) [3.5 punti] Per il principio di separazione del regolatore, un regolatore dead-beat per il sistema esiste se e solo se

a) esiste K t.c. $F + GK$ sia nilpotente;

b) esiste H t.c. $F + LH$ sia nilpotente.

La b) ha già avuto risposta positiva al punto i). Si tratta quindi di valutare se esiste un controllore dead-beat per il sistema. Valutiamo la raggiungibilità del sistema.

$$\mathcal{R} = [\, G \quad FG \quad F^2G \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che il sistema è raggiungibile (in particolare è raggiungibile dal solo secondo ingresso), perciò esiste un controllore dead-beat.
Tra le numerose soluzioni, la più semplice dal punto di vista dei conti consiste nell'osservare che, in corrispondenza alla generica matrice di retroazione

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

la matrice del sistema retroazionato diventa

$$F + GK = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 - 1 & c_2 \\ 1 & -2 & 0 \\ a_1 + 1 & b_1 + 1 & c_1 \end{bmatrix},$$

e quindi la prima e la terza riga di $F + GK$ sono completamente arbitrarie.
Se imponiamo:

$$F + GK = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 - 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che corrisponde ad assumere $a_1 = -1$, $b_1 = -1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, e scegliamo a_2 e b_2 in modo tale che $\det \begin{bmatrix} z - a_2 & -b_2 + 1 \\ -1 & z + 2 \end{bmatrix} = z^2$, otteniamo il risultato desiderato. Da

$$(z - a_2)(z + 2) + 1 - b_2 = z^2,$$

si trova $a = 2$, $b = -3$ e quindi

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teoria. [4.5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi, Ed. Libreria Progetto, Padova, capitolo sulla retroazione.