COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
31 Agosto 2007 - A.A. 2006/2007

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo non lineare descritto dalla seguente equazione si stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = \cos x_2(t) - x_1(t)u(t) - 1, \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = \sin x_2(t) - x_1(t)u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

i) Si determinino, al variare di $\bar{u}$ in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}, t \in \mathbb{R}_+$;
[Suggerimento: si ricordi la formula $\cos\alpha\cos\phi - \sin\alpha\sin\phi = \cos(\alpha + \phi)$.]

ii) per $\bar{u} = 1$, si determini il modello linearizzato del sistema in corrispondenza a ciascuno dei punti di equilibrio (generici).

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \geq 0.$$

i) Operando nel dominio del tempo, si calcoli l'esponenziale della matrice F, e^{Ft}, e l'evoluzione libera di stato $x_\ell(t)$ a partire da una condizione iniziale generica $x(0) = x_0$;
[Suggerimento: procedere al calcolo dell'esponenziale attraverso la forma di Jordan di F.]

ii) si dica, senza effettuare il calcolo, se esiste o meno un ingresso $u(t)$ che permetta al sistema di evolvere dalla condizione iniziale $x(0) = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ alla condizione finale $x(1) = [e^1 \quad e^1 \quad e^{-1}]^T$;

iii) si calcoli, se possibile, una matrice di retroazione K in modo tale che tutte le traiettorie dell'evoluzione libera di stato $x_\ell(t)$ del risultante sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + gK, g)$ siano contenute in una retta passante per l'origine.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0.\end{aligned}$$

i) Si determini, se esiste, uno stimatore dallo stato in modo tale che l'errore di stima sia combinazione lineare dei soli modi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t, \binom{t}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}.$$

ii) Si determini, se esiste, un controllo in retroazione dallo stato K in modo tale che il sistema retroazionato non sia asintoticamente stabile, ma la funzione di trasferimento dall'ingresso alla prima uscita ($w_{1K}(z)$) sia BIBO stabile.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria.

- *Studenti IG*: Si dimostri che un sistema $\Sigma = (F, G, H)$, di dimensione n, è raggiungibile se e solo se la matrice $[\, zI_n - F \quad | \quad G \,]$ ha rango n per ogni $z \in \mathbb{C}$.
- *Studenti IMC*: Si enunci e si illustri con un esempio il criterio di raggiungibilità per coppie (F, G) con F in Forma di Jordan.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} 0 &= \cos x_{2e} - x_{1e}\bar{u} - 1 \\ 0 &= \sin x_{2e} - x_{1e}\bar{u}. \end{cases}$$

Analizziamo la seconda equazione distinguendo tra i casi

- $\bar{u} = 0$;
- $\bar{u} \neq 0$.

Per $\bar{u} = 0$ la seconda equazione diventa $0 = \sin x_{2e}$, che ammette come soluzioni $x_{2e} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tuttavia, una volta aggiornata la prima equazione si trova

$$0 = \cos(k\pi) - 1,$$

che ha soluzione solo per k pari. Si noti che non c'è nessun vincolo sulla variabile x_{1e}. Pertanto, per $\bar{u} = 0$, i punti di equilibrio sono rette parallele all'asse x_1 del tipo $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e}) = (x_{1e}, 2k\pi), x_{1e} \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$.

Per $\bar{u} \neq 0$ la seconda equazione diventa $x_{1e} = \frac{\sin x_{2e}}{\bar{u}}$, che, sostituita nella prima equazione, porta a

$$0 = \cos x_{2e} - \sin x_{2e} - 1 = \sqrt{2}\cos\left(x_{2e} + \frac{\pi}{4}\right) - 1,$$

ovvero a

$$\cos\left(x_{2e} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tale equazione ha soluzioni

$$x_{2e} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Si giunge pertanto a

$$x_{2e} \in \left\{2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Si noti che, per $x_{2e} = 2k\pi$ si trova $x_{1e} = 0$, mentre per $x_{2e} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ si trova $x_{1e} = -\frac{1}{\bar{u}}$. Di conseguenza i punti di equilibrio sono di due tipi: $\mathbf{x}_e = (0, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, e $\mathbf{x}_e = \left(-\frac{1}{\bar{u}}, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

ii) [3.5 punti] Le equazioni del sistema non lineare sono del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)), \end{cases}$$

e per $u(t) = \bar{u} = 1$ tale sistema presenta come punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, e $\mathbf{x}_e = \left(-1, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$. Il sistema linearizzato in un intorno di ciascuno dei precedenti punti assume la forma

$$\delta\dot{x}(t) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

dove

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \begin{bmatrix} -\bar{u} & -\sin(x_{2e}) \\ -\bar{u} & \cos(x_{2e}) \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1};$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \begin{bmatrix} -x_{1e} \\ -x_{1e} \end{bmatrix}\Bigg|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1}.$$

Pertanto nei punti di equilibrio del tipo $\mathbf{x}_e = (0, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mentre nei punti di equilibrio del tipo $\mathbf{x}_e = \left(-1, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. i) [4.5 punti] Per effettuare il calcolo dell'esponenziale della matrice F, e^{Ft}, procediamo attraverso il calcolo della forma di Jordan di F. Infatti, una volta determinata la forma di Jordan J della matrice F e la corrispondente matrice di cambio di base T, tali che $J = T^{-1}FT$, l'esponenziale di F risulta calcolabile come $e^{Ft} = Te^{Jt}T^{-1}$.
Notiamo subito che la matrice F è diagonale a blocchi:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix},$$

con $F_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $F_{22} = [\,-1\,]$. Dalla struttura a blocchi di F segue che la forma di Jordan corrispondente è una matrice diagonale a blocchi, partizionata in modo conforme alla partizione a blocchi di F, ovvero:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ 0 & J_{22} \end{bmatrix},$$

con J_{11} la forma di Jordan di F_{11} e J_{22} la forma di Jordan di F_{22}. Poiché il polinomio caratteristico di F_{11}, $\Delta_{F_{11}}(s) = (s+1)(s-\frac{1}{2})$, presenta due autovalori semplici e distinti, è immediato rendersi conto del fatto che F_{11} è diagonalizzabile e pertanto $J_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. D'altra parte, esendo F_{22} di dimensione 1×1, ne segue banalmente che $J_{22} = F_{22} = [\,-1\,]$, e quindi

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, la matrice T di cambio di base presenta struttura diagonale a blocchi conforme a quella di F:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

e le colonne di T_{11} sono autovettori di F_{11} relativi rispettivamente all'autovalore in -1 e a quello in $\frac{1}{2}$, mentre $T_{22} = [1]$. Pertanto, dopo alcuni calcoli, si trova:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo dell'esponenziale di F risulta

$$e^{Ft} = Te^{Jt}T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{t/2} & \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2} & 0 \\ \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{t/2} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{t/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

L'evoluzione libera di stato $x_\ell(t)$ a partire da una condizione iniziale generica $x(0) = x_0$ è pari a

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= e^{Ft}x(0) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{t/2} & \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2} & 0 \\ \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{t/2} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{t/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{t/2}\right) x_{10} + \left(\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}\right) x_{20} \\ \left(\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{t/2}\right) x_{10} + \left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{t/2}\right) x_{20} \\ e^{-t}x_{30} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ii) [3 punti] L'espressione dello stato al generico istante $t \in \mathbb{R}_+$, per un sistema a tempo continuo, è data da $x(t) = e^{Ft}x(0) + R_t u(\cdot)$, dove R_t è un operatore lineare la cui immagine coincide con l'immagine della matrice di raggiungibilità $\mathcal{R}$ del sistema, e corrisponde al sottospazio raggiungibile:

$$\mathrm{ImR}_t = \mathrm{Im}\mathcal{R} = X_t^R.$$

Per garantire l'esistenza di un ingresso $u(\cdot)$ che faccia evolvere il sistema da $x(0)$ a $x(1)$, deve essere verificata la condizione

$$x(1) - e^F x(0) \in \mathrm{Im}R_1 = \mathrm{Im}\mathcal{R},$$

dove la matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R} = [\, g \quad Fg \quad F^2 g \,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La condizione di cui sopra si traduce in

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e^1 \\ e^1 \\ e^{-1} \end{bmatrix} - e^F \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\in \ < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} > \\ \begin{bmatrix} e^1 \\ e^1 \\ 0 \end{bmatrix} &\in \ < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} >, \end{aligned}$$

condizione che risulta verificata. Pertanto esiste l'ingresso che risolve il problema di controllo assegnato.

iii) [3 punti] Affinché tutte le traiettorie dell'evoluzione libera di stato siano delle rette passanti per l'origine è necessario e sufficiente che la matrice $F+gK$ del sistema retroazionato sia simile ad una matrice diagonale con elementi diagonali identici (nel seguito indicati con il simbolo λ). Questa condizione richiede, in primo luogo, di attribuire mediante retroazione il medesimo valore λ a tutti gli autovalori di $F+gK$. Studiamo pertanto la raggiungibilità del sistema. La matrice di raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R} = [\, g \quad Fg \quad F^2 g\,] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 1, e la matrice PBH di raggiungibilità scende di rango sia in corrispondenza dell'autovalore -1, sia di $1/2$. Pertanto entrambi questi autovalori sono autovalori del sottosistema non raggiungibile e quindi non sono modificabili dalla retroazione. Questo risultato ci permette di concludere che non è possibile avere tutti e tre gli autovalori uguali, e di conseguenza non è possibile avere traiettorie in evoluzione libera rettilinee passanti per l'origine.

Esercizio 3. i) [3.5 punti] È immediato verificare che il sistema è in forma standard di osservabilità, giacché la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

è osservabile e che $F_{22} = 1/2$. Pertanto esiste una matrice L tale che il polinomio caratteristico di $F+LH$ sia $\left(z-\frac{1}{2}\right)^3$. Inoltre, prendendo

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

possiamo attribuire alla matrice $F+LH$ la struttura diagonale blocchi

$$F + LH = \begin{bmatrix} F_{11} + L_1 H_1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, se facciamo in modo che $F_{11} + L_1 H_1$ abbia polinomio caratteristico $\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$, coincidente con il suo polinomio minimo, otteniamo il risultato desiderato. Posto

$$L_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

e imponendo

$$F_{11} + L_1 H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

si trova

$$L_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

ii) [3.5 punti] Il sistema è raggiungibile, pertanto è possibile attribuire al polinomio caratteristico $\Delta_{F+gK}(z)$ un'espressione arbitraria (all'interno dei polinomi monici di terzo grado). Tenuto conto del fatto che

$$w_1(z) = \frac{2-z}{(z-1)^2} = \frac{(2-z)(z-1/2)}{(z-1)^2(z-1/2)},$$

si tratta di attribuire alla matrice $F+gK$, ad esempio, un polinomio caratteristico del tipo

$$\Delta_{F+gK}(z) = (z-2)(z-1/2)z.$$

In tal modo certamente il sistema non risulta asintoticamente stabile, tuttavia

$$w_{1K}(z) = \frac{(2-z)(z-1/2)}{(z-2)(z-1/2)z} = -\frac{1}{z},$$

e quindi la funzione di trasferimento è BIBO stabile. Posto

$$K = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix},$$

si trova

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1+b & c \\ a & b & c+1/2 \end{bmatrix}.$$

Prendendo $c = 0$ e imponendo che il polinomio caratteristico di

$$F_{11} + g_1 K_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1+b \end{bmatrix}$$

$(z-1)(z-1-b) - a = z^2 + (-2-b)z + (1+b-a)$ sia $z(z-2) = z^2 - 2z$, risultato a cui perveniamo assumendo $a = 1, b = 0$, otteniamo il risultato desiderato. Pertanto

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.